

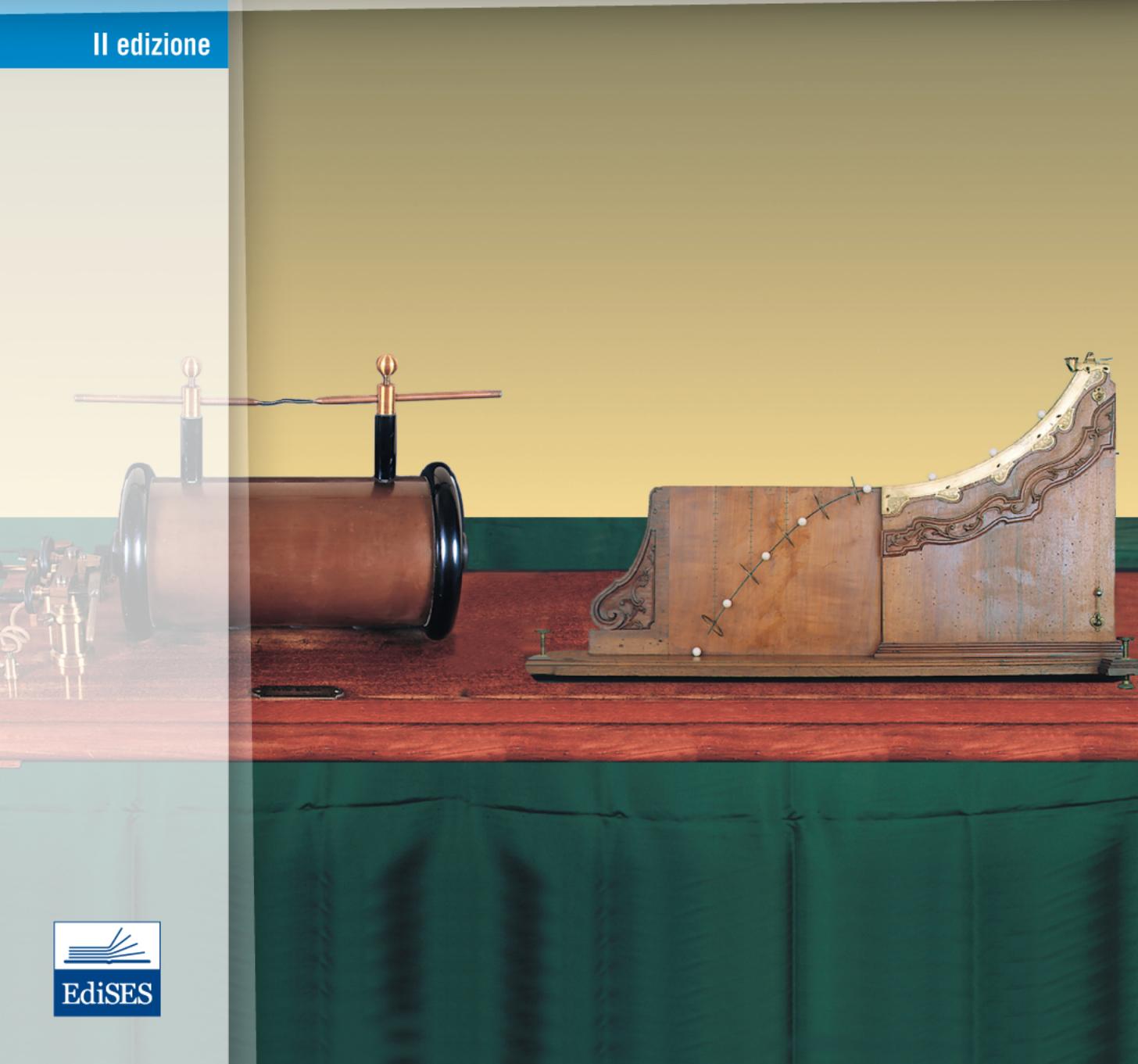
P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci



Fisica

Volume II

II edizione



P. Mazzoldi

M. Nigro

C. Voci

Dipartimento di Fisica Galileo Galilei Padova

FISICA

Vol. II

ELETTROMAGNETISMO – ONDE

SECONDA EDIZIONE

EdiSES

P. Mazzoldi - M. Nigro - C. Voci
FISICA – Vol. II Seconda edizione
Copyright © 1991, 1998, EdiSES s.r.l.

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2002 2001 2000 1999 1998

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

/

A norma di legge, le pagine di questo volume non possono essere fotocopiate o ciclostilate o comunque riprodotte con alcun mezzo meccanico. La casa editrice sarebbe particolarmente spiacente di dover promuovere, a sua tutela, azioni legali verso coloro che arbitrariamente non si adeguano a tale norma.
L'Editore

Fotocomposizione: EdiSES s.r.l. – Napoli

Fotoincisione: Centro DMS – Napoli

Stampato presso la

Sograte s.r.l. – Zona Ind. Regnano

Città di Castello (PG) – Tel. 075/8518004

per conto della

EdiSES – Napoli Via Nuova San Rocco 62/A – P.co Soleado

Tel. 081/7441706-07 Fax 081/7441705

ISBN 88 7959 152 5

Indice generale

Capitolo 1	Forza elettrica. Campo elettrostatico	1	3.6	Riepilogo sulle operazioni di gradiente, rotore, divergenza	86
1.1	Cariche elettriche. Isolanti e conduttori	1			
1.2	Struttura elettrica della materia	3			
1.3	Misura delle cariche elettriche. Legge di Coulomb	5	Capitolo 4	Conduttori. Energia elettrostatica	89
1.4	Campo elettrostatico	11	4.1	Conduttori in equilibrio	89
1.5	Campo elettrostatico prodotto da una distribuzione continua di carica	14	4.2	Capacità di un conduttore isolato	91
1.6	Linee di forza del campo elettrostatico	20	4.3	Conduttore cavo. Schermo elettrostatico	93
1.7	Moto di una carica in un campo elettrostatico. Esperienza di Rutherford	21	4.4	Sistemi di conduttori	98
1.8	Determinazione della carica elementare. Esperienza di Millikan	25	4.5	Condensatori	101
1.9	Commenti conclusivi	27	4.6	Collegamento di condensatori	104
			4.7	Energia del campo elettrostatico	108
			4.8	Energia di un sistema di cariche	111
			4.9	Forza tra le armature di un condensatore. Pressione elettrostatica	115
Capitolo 2	Lavoro elettrico. Potenziale elettrostatico	29	4.10	Il metodo delle cariche immagini	120
2.1	Lavoro della forza elettrica. Tensione, potenziale	29	4.11	Funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet	124
2.2	Calcolo del potenziale elettrostatico	31	Capitolo 5	Dielettrici	127
2.3	Energia potenziale elettrostatica	35	5.1	La costante dielettrica	127
2.4	Il campo come gradiente del potenziale	45	5.2	Polarizzazione dei dielettrici	130
2.5	Superficie equipotenziali	51	5.3	Campo elettrico prodotto da un dielettrico polarizzato	131
2.6	Rotore di un campo vettoriale. Teorema di Stokes. Applicazione al campo elettrostatico	52	5.4	Campo elettrico all'interno di un dielettrico polarizzato	134
2.7	Il dipolo elettrico	57	5.5	Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici. Il vettore induzione dielettrica	135
2.8	Potenziale di un sistema di cariche nell'approssimazione di dipolo	59	5.6	Dipendenza della polarizzazione dal campo elettrico. Mezzi isotropi e anisotropi	138
2.9	La forza su un dipolo elettrico	62	5.7	Discontinuità dei campi sulla superficie di separazione tra due dielettrici	141
Capitolo 3	La legge di Gauss	68	5.8	Campo elettrico all'interno di una cavità in un dielettrico	145
3.1	Flusso del campo elettrico. Legge di Gauss	68	5.9	L'energia elettrostatica nei dielettrici	147
3.2	Alcune applicazioni e conseguenze della legge di Gauss	72	5.10	Meccanismi di polarizzazione nei dielettrici isotropi	152
3.3	Campo elettrostatico nell'intorno di uno strato superficiale di carica	78	5.11	La costante dielettrica dei liquidi. Equazione di Clausius-Mossotti	158
3.4	Legge di Gauss in forma differenziale. Divergenza di un campo vettoriale	79	5.12	Cenno ai meccanismi di polarizzazione nei solidi	160
3.5	Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica. Equazioni di Poisson e di Laplace	82			

Capitolo 6	Corrente elettrica	161	Capitolo 9	Proprietà magnetiche della materia	269
6.1	Conduzione elettrica	161	9.1	Magnetizzazione della materia	269
6.2	Corrente elettrica	164	9.2	Permeabilità magnetica e suscettività magnetica	271
6.3	Legge di conservazione della carica. Regime di corrente stazionaria	166	9.3	Correnti amperiane e magnetizzazione	274
6.4	Modello classico della conduzione elettrica. Legge di Ohm	168	9.4	Equazioni generali della magnetostatica. Il campo H	276
6.5	Legge di Ohm per i conduttori metallici. Resistenza elettrica. Effetto Joule	171	9.5	Discontinuità dei campi sulla superficie di separazione tra due mezzi magnetizzati. Campi all'interno di una cavità	282
6.6	Resistori in serie e in parallelo	179	9.6	Confronto tra le leggi dell'elettrostatica e della magnetostatica in mezzi omogenei indefiniti	287
6.7	Forza elettromotrice. Legge di Ohm generalizzata	181	9.7	Sostanze ferromagnetiche	289
6.8	Il generatore Van der Graaf	186	9.8	Circuiti magnetici	292
6.9	Carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore	188	9.9	Elettromagneti, magneti permanenti	295
6.10	Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche	192	9.10	Correnti elettriche e momenti magnetici atomici	302
6.11	Alcuni circuiti particolari in corrente continua	195	9.11	Teoria microscopica classica del diamagnetismo e del paramagnetismo	307
6.12	Calcolo della resistenza di conduttori tridimensionali	199	9.12	Cenno alla teoria del ferromagnetismo	313
6.13	Conduzione elettrolitica	200			
6.14	Pile e accumulatori	205			
Capitolo 7	Forza magnetica. Campo magnetico	208	Capitolo 10	Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo	318
7.1	Primi fatti sperimentali sull'interazione magnetica	208	10.1	Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica	319
7.2	Linee di forza del campo magnetico. Legge di Gauss per il campo magnetico	212	10.2	Origine fisica della forza elettromotrice indotta	321
7.3	Forza magnetica su una carica in moto	214	10.3	Applicazioni delle legge di Faraday	328
7.4	Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente	218	10.4	Legge di Felici. Misure di campo magnetico	335
7.5	Momenti meccanici su circuiti piani. Principio di equivalenza di Ampère	221	10.5	Autoinduzione	337
7.6	Espressioni di forza, momento e lavoro tramite il flusso magnetico	224	10.6	Energia magnetica	340
7.7	Effetto Hall	230	10.7	Pressione magnetica. Forze su corpi magnetizzati	346
7.8	Esempi di moti di particelle cariche in campo magnetico uniforme	232	10.8	Induzione mutua	350
			10.9	Energia magnetica di circuiti accoppiati	351
			10.10	Corrente di spostamento. Legge di Ampère-Maxwell	357
			10.11	Equazioni di Maxwell	361
Capitolo 8	Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampère	240	Capitolo 11	Oscillazioni elettriche. Correnti alternate	366
8.1	Campo magnetico prodotto da una corrente	240	11.1	Oscillazioni smorzate in un circuito RLC	366
8.2	Calcoli di campi magnetici prodotti da circuiti particolari	243	11.2	Oscillazioni permanenti in un circuito RLC	371
8.3	Azioni elettrodinamiche tra circuiti percorsi da corrente	250	11.3	Circuiti in corrente alternata. Impedenza	374
8.4	Legge di Ampère	252	11.4	Metodo simbolico per i circuiti in corrente alternata	382
8.5	Flusso tra circuiti. Autoflusso	258	11.5	Alcune applicazioni	387
8.6	Proprietà del campo magnetostatico nel vuoto	261	11.6	Potenza in regime alternato	392
8.7	Potenziale vettore	263	11.7	Generatori e motori	395
8.8	Le trasformazioni dei campi elettrici e magnetici	267			

Problemi di Elettromagnetismo	399	14.6	Propagazione di un'onda piana elettromagnetica in un mezzo anisotropo	562
Guida alla risoluzione dei problemi di Elettromagnetismo. Risultati numerici	420	14.7	Applicazioni della birifrangenza	567
		14.8	Birifrangenza elettrica, magnetica e meccanica	574
Capitolo 12 Fenomeni ondulatori	443	14.9	Attività ottica	575
12.1	Descrizione di un'onda. Equazione differenziale delle onde piane	443		
12.2	Richiamo sulle onde elastiche	446		
12.3	Onde piane armoniche	457		
12.4	Analisi di Fourier	459		
12.5	Onde longitudinali. Onde trasversali. Polarizzazione	461		
12.6	Onde sulla superficie di un liquido	463		
12.7	Propagazione dell'energia. Intensità di un'onda	465		
12.8	Intensità delle onde sonore. Battimenti	469		
12.9	Onde in più dimensioni	474		
12.10	Pacchetti d'onde	480		
12.11	Velocità di fase e velocità di gruppo	483		
12.12	Effetto Doppler. Onda d'urto	487		
Capitolo 13 Onde elettromagnetiche	490			
13.1	Onde elettromagnetiche piane	490		
13.2	Polarizzazione delle onde elettromagnetiche piane	495		
13.3	Energia di un'onda elettromagnetica piana. Vettore di Poynting	498		
13.4	Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana. Pressione di radiazione	502		
13.5	Onde elettromagnetiche piane, sferiche, cilindriche	505		
13.6	Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante	507		
13.7	Radiazione emessa da una carica elettrica in moto accelerato	511		
13.8	Radiazione emessa dagli atomi. Diffusione della luce	514		
13.9	Propagazione di un'onda elettromagnetica in un mezzo dielettrico. Dispersione	518		
13.10	Onde elettromagnetiche nei conduttori	525		
13.11	Effetto Doppler. Effetto Cerenkov	528		
13.12	Spettro delle onde elettromagnetiche	531		
13.13	La velocità della luce	536		
Capitolo 14 Riflessione e rifrazione delle onde	539			
14.1	Introduzione	539		
14.2	Teorema di Kirchhoff. Principio di Huygens-Fresnel	539		
14.3	Le leggi della riflessione e della rifrazione	542		
14.4	Intensità delle onde elettromagnetiche riflesse e rifratte. Formule di Fresnel	548		
14.5	Riflessione e rifrazione di onde elastiche	560		
		14.6	Propagazione di un'onda piana elettromagnetica in un mezzo anisotropo	562
		14.7	Applicazioni della birifrangenza	567
		14.8	Birifrangenza elettrica, magnetica e meccanica	574
		14.9	Attività ottica	575
		14.10	Riflessione su una superficie metallica	577
Capitolo 15 Interferenza	578			
15.1	Somma di onde. Fenomeni di interferenza. Sorgenti coerenti e incoerenti	578		
15.2	Interferenza prodotta da due sorgenti. Caso delle onde hertziane e delle onde sonore	581		
15.3	Interferenza di due onde luminose. Esperimento di Young	587		
15.4	Applicazioni del metodo di Young	594		
15.5	Interferenza prodotta da N sorgenti coerenti	597		
15.6	Interferenza delle onde luminose su lamine sottili	602		
15.7	Interferenza con riflessioni e trasmissioni multiple	611		
15.8	Onde stazionarie in una corda tesa	612		
15.9	Onde stazionarie in una colonna di gas	618		
15.10	Onde elettromagnetiche stazionarie. Esperienza di Hertz	620		
15.11	Onde stazionarie bidimensionali e tridimensionali. Radiazione di cavità	622		
15.12	Cavità risonanti. Guide d'onda	627		
Capitolo 16 Diffrazione	631			
16.1	Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel	631		
16.2	Diffrazione ad una fenditura rettilinea	632		
16.3	Diffrazione ad un foro circolare e da parte di un disco opaco	636		
16.4	Limite di risoluzione delle lenti	638		
16.5	Reticolo di diffrazione	641		
16.6	Potere dispersivo e potere risolutivo di un reticolo di diffrazione	644		
16.7	Spettroscopia con il reticolo di diffrazione	647		
16.8	Fenomeni di diffrazione di Fresnel	651		
16.9	Olografia	655		
16.10	Diffrazione dei raggi X	658		
Capitolo 17 Ottica geometrica	662			
17.1	Leggi della riflessione e della trasmissione	662		
17.2	Definizioni e convenzioni	664		
17.3	Specchi	665		
17.4	Diottri	670		
17.5	Lenti sottili	673		

17.6	Lenti spesse. Sistemi diottrici centrati	677	Capitolo 19	Proprietà degli elettroni nei solidi	724
17.7	Aberrazioni	681	19.1	Introduzione	724
17.8	Strumenti ottici. L'occhio	683	19.2	Struttura elettronica degli atomi	724
17.9	Dispersione. Prisma	686	19.3	Legami nelle molecole e nei solidi. Bande di energia	730
17.10	Il principio di Fermat	689	19.4	Il gas di elettroni liberi di Fermi	736
17.11	Note e commenti	690	19.5	Gas di elettroni all'interno di un reticolo cristallino	741
Capitolo 18	Proprietà corpuscolari e ondulatorie della radiazione e della materia	692	19.6	Conduttori e isolanti. Semiconduttori	743
18.1	Introduzione	692	19.7	Superconduttività	749
18.2	Radiazione termica. Corpo nero	692	19.8	Effetto Volta. Effetti termoelettrici	752
18.3	Legge di Planck	696	Problemi di Onde	757	
18.4	Effetto fotoelettrico	698	Guida alla risoluzione dei problemi di Onde. Risultati numerici	769	
18.5	Effetto Compton. Produzione di coppie	702	Indice analitico	783	
18.6	Righe spettrali. Modello di Bohr. Livelli energetici	707			
18.7	Onde materiali. Relazione di de Broglie	713			
18.8	Il principio di indeterminazione	717			

16.1 Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel

La *diffrazione* è un particolare fenomeno di interferenza che si verifica quando un'onda incontra nel suo percorso un ostacolo o un'apertura. Ad esempio l'apertura può essere costituita da un foro circolare o rettangolare, praticato in uno schermo assorbente per le onde in esame, un ostacolo da un filo, un disco assorbente o più in generale da un qualsiasi oggetto. Qualitativamente, nello spazio oltre l'ostacolo o l'apertura le onde si propagano anche lungo direzioni *diverse* da quella di incidenza e hanno origine differenze di cammino tra onde che si sovrappongono in un dato punto; possono quindi avvenire fenomeni di interferenza con conseguente ridistribuzione dell'energia nei punti dello spazio, da cui risultano le caratteristiche *figure di diffrazione*. Gli effetti della diffrazione sono di norma tanto più vistosi quanto più le dimensioni dell'apertura o dell'ostacolo sono vicine al valore della lunghezza d'onda delle onde incidenti.

I fenomeni di diffrazione si verificano con tutti i tipi di onde; essi si osservano facilmente nel caso delle onde sulla superficie di un liquido e delle onde sonore, aventi lunghezze d'onda prossime alle dimensioni di molti oggetti comuni. Più difficile è l'osservazione nel caso delle onde luminose, proprio a causa della piccola lunghezza d'onda ($\lambda = 0.4 \div 0.7 \mu\text{m}$); però la fenomenologia e le applicazioni sono molto interessanti e per questa ragione ci occuperemo soprattutto della diffrazione della luce. Le argomentazioni generali tuttavia restano valide per qualsiasi tipo di onda.

Storicamente la diffrazione venne osservata per la prima volta da Grimaldi nella seconda metà del diciassettesimo secolo, in un'epoca che sarebbe stata dominata dalla teoria di Newton, la quale attribuiva alla luce una natura corpuscolare, in contrasto con la teoria ondulatoria di Huygens. L'ipotesi ondulatoria si affermò solamente dopo oltre cent'anni, a seguito degli esperimenti di Young e Fresnel.

Nella figura 16.1 è illustrato un caso comune in cui si osserva diffrazione: un'onda arriva su uno schermo opaco nel quale è praticato un foro di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda della luce incidente; uno schermo C , o una pellicola fotografica, riceve la luce che ha attraversato il foro.

Per il calcolo dell'ampiezza luminosa in un punto P dello schermo si ricorre al *principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff*, enunciato nel paragrafo 14.2. La superficie dell'apertura viene suddivisa in infiniti elementi di area $d\Sigma$, ciascuno dei quali rappresenta una sorgente elementare di onde, avente l'ampiezza di campo elettrico

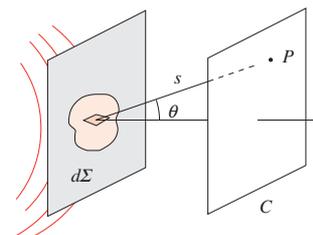


Figura 16.1

$$dE = \frac{Af(\theta) d\Sigma}{s}, \quad f(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2} \quad (16.1)$$

L'ampiezza risultante in P si ottiene sommando vettorialmente i contributi dE provenienti da tutte le sorgenti che costituiscono il foro illuminato, sorgenti che sono intrinsecamente coerenti, esattamente in fase se la superficie del foro coincide con una parte del fronte d'onda incidente e con differenza di fase costante negli altri casi.

Se l'onda incide su un ostacolo opaco, ad esempio un disco, per il calcolo dell'ampiezza dell'onda in un punto P oltre l'ostacolo si procede nello stesso modo, considerando le parti del fronte d'onda non interessate dall'ostacolo.

Tra i possibili modi con cui si realizza e si osserva la diffrazione prodotta da aperture e ostacoli illuminati se ne considerano essenzialmente due, legati ai nomi di Fraunhofer e di Fresnel.

a) Diffrazione di Fraunhofer

La sorgente di luce S e lo schermo C sono a grande distanza dall'apertura. I fronti d'onda che giungono su questa sono piani e tali sono anche i fronti d'onda che giungono in P provenienti dall'apertura. Questa configurazione, che è la più semplice da trattare analiticamente, si realizza in laboratorio con due lenti: la prima L_1 trasforma l'onda sferica proveniente da S in un'onda piana con fronte d'onda che contiene l'apertura, la seconda L_2 focalizza in un punto P i raggi provenienti dall'apertura secondo una stessa direzione.

b) Diffrazione di Fresnel

La sorgente S e lo schermo C sono a distanza finita dall'apertura, i fronti d'onda non sono piani e i raggi che arrivano in P non sono paralleli; la stessa situazione può essere considerata per un ostacolo generico.

Nel seguito tratteremo per primi i fenomeni di Fraunhofer, che tra l'altro sono interessanti per le loro implicazioni riguardanti strumenti ottici semplici e composti. Ci occuperemo successivamente della diffrazione di Fresnel in casi matematicamente semplici, ma significativi.

16.2 Diffrazione ad una fenditura rettilinea

Cominciamo a discutere la diffrazione di Fraunhofer considerando un foro rettangolare praticato in uno schermo opaco, di larghezza $a = AB$ e lunghezza $L \gg a$, foro che viene chiamato fenditura rettilinea (indefinita); nella figura 16.3 la fenditura si sviluppa ortogonalmente al disegno.

Supponiamo che sulla fenditura incida un'onda piana di lunghezza d'onda λ , con il fronte d'onda parallelo al piano contenente la fenditura, e suddividiamo questa in N strisce parallele di larghezza Δy . Ciascuna striscia funge da sorgente di onde secondarie e contribuisce con l'ampiezza ΔE al campo elettrico risultante E_R in un punto P dello schermo individuato dai raggi uscenti ad angolo θ rispetto alla normale al piano della fenditura. I contributi ΔE relativi a due strisce adiacenti hanno nel punto P la differenza di fase

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta ,$$

derivante dalla differenza di cammino $\Delta y \sin\theta$.

Per il calcolo di E_R si procede come nel caso di N sorgenti coerenti (paragrafo

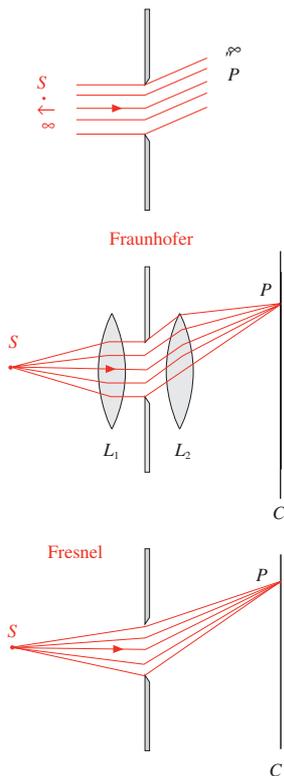


Figura 16.2

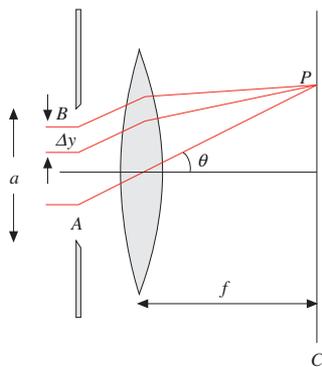


Figura 16.3

15.5), attraverso la costruzione della poligonale degli N vettori rotanti rappresentanti le onde che si sovrappongono. Adesso però bisogna far tendere N all'infinito ovvero Δy a zero, per cui la poligonale diventa un arco di circonferenza di raggio ρ con angolo al centro

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta \quad , \quad (16.2)$$

eguale alla differenza di fase tra le onde emesse nei punti estremi A e B della fenditura. Dalla figura 16.4 risulta

$$E_R = 2\rho \sin \frac{\alpha}{2} \quad .$$

La lunghezza dell'arco di circonferenza è $E_{\max} = \rho\alpha$ e corrisponde all'ampiezza massima che si osserva al centro dello schermo, quando $\theta = 0$ e tutte le onde emesse dalle singole strisce sono in fase. In definitiva

$$E_R = f(\theta) E_{\max} \frac{\sin\alpha/2}{\alpha/2} \quad ,$$

espressione nella quale abbiamo evidenziato il fattore di inclinazione $f(\theta)$ in quanto tutte le ampiezze emesse ad angolo $\theta \neq 0$ vanno moltiplicate per $f(\theta)$.

L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza; ricorriamo a (16.2) e abbiamo

$$I(\theta) = I_{\max} f^2(\theta) \left[\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right]^2 = I_{\max} f^2(\theta) \left[\frac{\sin \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}} \right]^2 \quad . \quad (16.3)$$

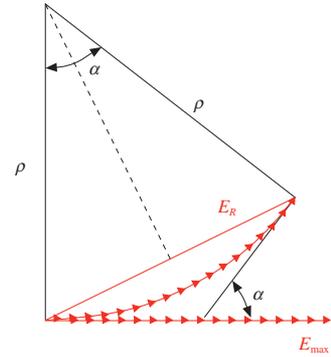


Figura 16.4

La funzione $I(\theta)$ è mostrata in figura 16.5 per i valori $a = 10\lambda$, $a = 5\lambda$, $a = \lambda$.

L'intensità trasmessa dalla fenditura si annulla nei cosiddetti *minimi di diffrazione*, quando

$$\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = m\pi \quad , \quad \sin\theta = m \frac{\lambda}{a} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad . \quad (16.4)$$

I primi minimi, a destra e a sinistra del massimo centrale, si hanno per $\sin\theta = \pm \lambda / a$ e la quantità

$$\Delta(\sin\theta) = \frac{2\lambda}{a}$$

si chiama *larghezza angolare del massimo centrale di diffrazione*. Si vede che per $a \gg \lambda$ il massimo è molto stretto e l'effetto della diffrazione è quasi trascurabile, ma che il massimo si allarga se a diminuisce tendendo a λ . Se fosse $a = \lambda$ il primo ed unico minimo si formerebbe a $\theta = 90^\circ$ e con $a < \lambda$ l'intensità non si annullerebbe mai: cioè con $a \leq \lambda$ tutto lo spazio al di là della fenditura è illuminato.

Nella figura 16.6 è ripreso l'andamento di $I(\theta)$ in un caso $a > \lambda$, insieme ad una

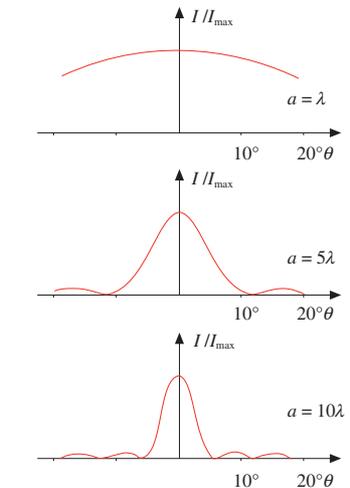


Figura 16.5

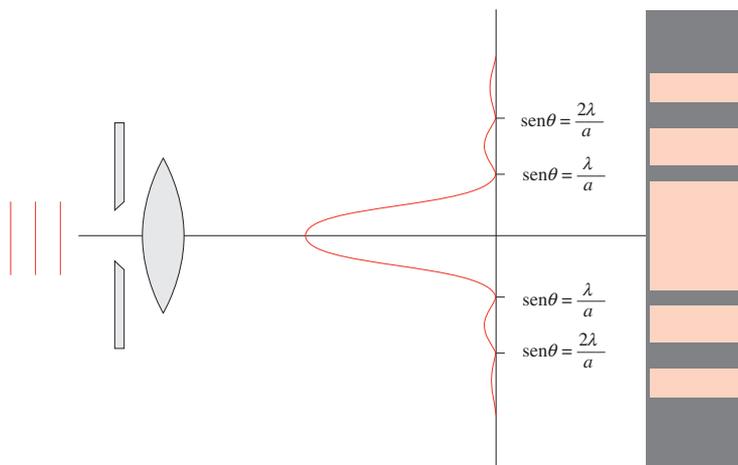


Figura 16.6

fotografia che mostra l'effetto visivo su uno schermo. Dato che la maggior parte della potenza ($\sim 80\%$) è concentrata nella frangia centrale, si usa dire che questa rappresenta l'*immagine della fenditura*.

Tra due minimi d'intensità esiste un *massimo secondario*, la cui posizione si calcola cercando i massimi della funzione $(\text{sen}^2\beta)/\beta^2$, che sintetizza l'andamento dell'intensità. Si trova la condizione $\text{tg}\beta = \beta$, equazione trascendente risolvibile con un metodo grafico (a parte il caso ovvio $\beta = 0$). Risulta però molto buona l'approssimazione di considerare massima l'intensità quando è massimo $\text{sen}^2(\pi a \text{sen}\theta / \lambda)$, ovvero quando

$$\frac{\pi a \text{sen}\theta}{\lambda} = (2m' + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \text{sen}\theta = (2m' + 1) \frac{\lambda}{2a} \quad m' = 1, 2, 3, \dots$$

L'intensità dei massimi secondari risulta pertanto, trascurando il fattore di inclinazione,

$$\frac{I_{m'}}{I_{\max}} = \frac{1}{\left[(2m' + 1) \frac{\pi}{2}\right]^2} \approx \frac{0.4}{(2m' + 1)^2}$$

Già nel primo massimo, $m' = 1$, si ha $I_1 / I_{\max} = 0.045$, ovvero l'intensità è molto minore rispetto al massimo centrale; per $m' = 2$ il rapporto vale 0.016, per $m' = 3$ vale 0.008 e così via. I rapporti sono ulteriormente depressi se si introduce il fattore $f^2(\theta)$. I massimi secondari non sono quindi ben visibili; se λ non è molto diversa da a essi sono abbastanza separati dal massimo centrale e i primi sono percepibili, se invece $\lambda \ll a$ essi cadono molto vicino alla direzione $\theta = 0$ e anche per tale ragione sono praticamente invisibili.

Esempio 16.1

Un'onda luminosa piana di lunghezza d'onda $\lambda = 0.59 \cdot 10^{-6}$ m attraversa una fenditura di larghezza a . La larghezza dell'immagine della fenditura, osservata nel piano focale di una lente di distanza focale $f = 60$ cm, è $\Delta x = 7.5$ mm. Calcolare il valore di a .

Soluzione

Semilarghezza dell'immagine, distanza focale e angolo θ a cui si ha il primo minimo sono legati dalla relazione

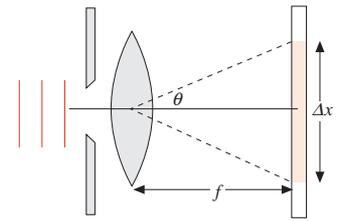
$$f \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 6.25 \cdot 10^{-3} .$$

Pertanto $\operatorname{tg} \theta \approx \operatorname{sen} \theta \approx \theta = 6.25 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0.36^\circ$ e da (16.4) con $m = 1$

$$\frac{\lambda}{a} = 6.25 \cdot 10^{-3} , \quad a = 0.094 \text{ mm} \approx 159 \lambda .$$

È come se, per effetto della diffrazione, la fenditura fosse stata ingrandita del fattore $7.5/0.094 \approx 79$.

Se volessimo $a = \Delta x$ si troverebbe $a^2 = 2f\lambda$; con i dati del problema $a = 0.84 \text{ mm}$: per tale valori di a l'immagine sarebbe larga quanto la fenditura.


Figura 16.7
Esempio 16.2

Un piccolo porto è completamente chiuso eccetto che per un'apertura larga $a = 20 \text{ m}$. Dall'esterno arrivano in direzione perpendicolare all'apertura onde con lunghezza d'onda $\lambda = 1.4 \text{ m}$. Determinare i luoghi dei punti all'interno del porto nei quali il moto ondoso è minimo.

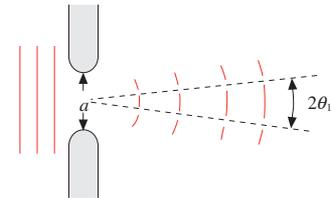
Soluzione

Applichiamo alle onde marine la trattazione precedente, valida se sono rispettate le stesse condizioni geometriche. I minimi di intensità si osservano nelle direzioni date da (16.4):

$$\operatorname{sen} \theta = m \frac{\lambda}{a} = 0.07 \text{ m} , \quad \theta_1 = \pm 4.0^\circ , \quad \theta_2 = \pm 8.0^\circ , \quad \theta_3 = \pm 12.1^\circ , \dots ;$$

il massimo centrale è compreso tra $+4.0^\circ$ e -4.0° .

All'interno del porto l'intensità del moto ondoso diminuisce con la distanza dell'apertura in quanto le onde secondarie sono circolari; inoltre l'intensità diminuisce fortemente con l'angolo, come si è visto.


Figura 16.8
Esempio 16.3

Una fenditura rettilinea larga $a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$ è illuminata con luce bianca nella quale sono presenti con la stessa intensità tutte le lunghezze d'onda dal rosso $\lambda_R = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ al violetto $\lambda_V = 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. La figura di diffrazione si forma su uno schermo posto nel piano focale di una lente con $f = 50 \text{ cm}$. Descrivere l'immagine della fenditura.

Soluzione

Il centro dell'immagine è bianco in quanto in esso si realizza la condizione di massimo di interferenza indipendentemente dalla lunghezza d'onda. Invece la variazione di intensità sullo schermo e le posizioni dei minimi e dei massimi secondari dipendono dalla lunghezza d'onda. Dato che in ogni caso $\lambda \ll a$, si può fare l'approssimazione $\operatorname{sen} \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$ e scrivere $f\theta = x$, essendo x la posizione sullo schermo in corrispondenza all'angolo θ . Pertanto

$$\frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \approx \frac{\pi a \theta}{\lambda} = \frac{\pi a x}{f \lambda} = 10^{-4} \frac{\pi x}{\lambda}$$

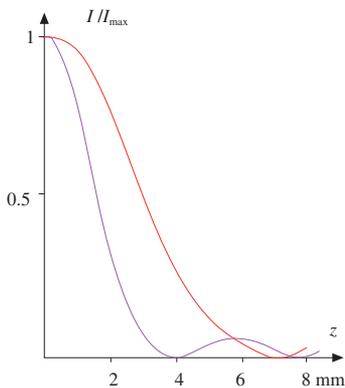


Figura 16.9

e la (16.3) si scrive

$$\frac{I}{I_{\max}} = \left[\frac{\text{sen} \frac{10^{-4} \pi x}{\lambda}}{\frac{10^{-4} \pi x}{\lambda}} \right]^2 .$$

Alle tre lunghezze d'onda

$$\lambda_V = 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm} , \quad \lambda_G = 0.55 \cdot 10^{-3} \text{ mm} , \quad \lambda_R = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ mm} ,$$

il primo minimo si ha per

$$x_V = 4.0 \text{ mm} , \quad x_G = 5.5 \text{ mm} , \quad x_R = 7.0 \text{ mm} .$$

Nella figura 16.9 sono rappresentate le intensità relative per le due lunghezze d'onda λ_V e λ_R . Spostandosi dal centro si osserva una colorazione di sottrazione, che va dal rosso al violaceo, tipica dei fenomeni di interferenza e determinata in ogni punto dalla mancanza di alcune lunghezze d'onda e dalla presenza più marcata di altre.

16.3 Diffrazione ad un foro circolare e da parte di un disco opaco

Quando l'apertura attraverso cui facciamo passare l'onda piana incidente è circolare la figura di diffrazione, per ragioni di simmetria, consta di un disco luminoso centrale circondato da una serie di corone circolari alternativamente scure e chiare. Queste frange, osservate in condizioni di Fraunhofer, presentano molte analogie con quanto visto nel caso dell'apertura rettilinea; lo studio analitico è però più complicato e non lo sviluppiamo.

Si trova in particolare che l'angolo a cui cade il primo minimo di intensità, corrispondente al bordo del disco centrale della figura di diffrazione, è dato da

$$\text{sen} \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{R} , \quad (16.6)$$

Primo minimo di diffrazione

se D e R sono rispettivamente il diametro e il raggio del foro circolare. Questa formula va confrontata con la (16.4) che dà, per una fenditura rettilinea larga a , $\text{sen} \theta = \lambda / a$ come direzione lungo cui si ha il primo minimo.

Il fattore 1.22 deriva appunto dal calcolo eseguito secondo il principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff, che integra su tutte le sorgenti secondarie infinitesime anulari in cui viene suddiviso il foro circolare. Il fattore numerico per il secondo minimo è 2.23, per il terzo 3.24; non si ha una successione regolare come in (16.4).

In molte applicazioni $\lambda \ll D$ e si può scrivere

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{R} ; \quad (16.7)$$

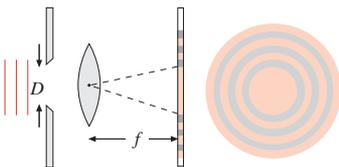


Figura 16.10

2θ è la larghezza angolare del massimo centrale.

L'andamento dell'intensità è mostrato in figura 16.11; anche ora si verifica che oltre l'80% dell'energia trasmessa dall'apertura è concentrata nel disco centrale luminoso, per cui gli anelli chiari concentrici al massimo centrale non sono ben visibili. Si può dire che il disco centrale, il cui bordo è visto dal centro del foro sotto l'angolo 2θ , rappresenta l'immagine del foro stesso.

Questi risultati si applicano chiaramente ad una *lente di apertura D* (ovvero di raggio *R*), per cui l'immagine di una sorgente puntiforme molto lontana è data, nel piano focale di una lente convergente, da un piccolo disco luminoso le cui dimensioni sono determinate dal rapporto f/D tra distanza focale e apertura della lente.

Esempio 16.4

L'obiettivo di una macchina fotografica, di apertura $D=2.5$ cm e distanza focale $f=5$ cm, è illuminato da una sorgente puntiforme lontana *S*, che emette luce di lunghezza d'onda $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$. Calcolare le dimensioni dell'immagine *S* nel piano focale dell'obiettivo.

Soluzione

Siamo di sicuro nella condizione $\lambda \ll D$ e utilizziamo (16.7): l'apertura angolare 2θ dell'immagine vista dal centro della lente è

$$2\theta = 2.44 \frac{\lambda}{D} = 5.37 \cdot 10^{-5} \text{ rad} .$$

L'immagine di *S* è un dischetto di diametro

$$d = 2\theta f = 2.44 \lambda \frac{f}{D} = 2.68 \mu\text{m} .$$

A causa della diffrazione il fuoco non è un punto geometrico, bensì acquista una dimensione finita, per quanto piccola e in molte applicazioni trascurabile.

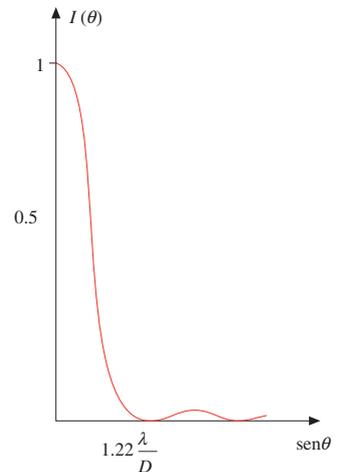


Figura 16.11

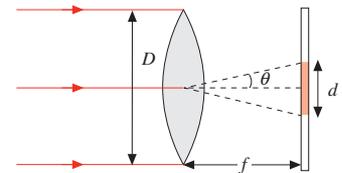


Figura 16.12

Diffrazione da parte di un disco opaco

Consideriamo un'onda piana monocromatica che incide su un'apertura circolare *G* di diametro *h* molto maggiore di λ . A grande distanza, su uno schermo *C*, non si osserva diffrazione in quanto $h \gg \lambda$: il campo elettrico E_G e l'intensità sono diversi da zero solo lungo la direzione individuata da $\theta=0$, ortogonale al piano di *G*.

Poniamo adesso sull'apertura *G* un disco opaco *A* di diametro *h* avente al centro un foro circolare di diametro *D*. In un punto *P* dello schermo, visto sotto l'angolo θ , si osserva un campo elettrico di ampiezza $E_A(\theta)$ e un'intensità $I_A(\theta)$ proporzionale a $E_A^2(\theta)$. Se invece di *A* poniamo, nella stessa posizione in cui c'era il foro di *A*, un disco opaco *B* di diametro *D*, nel punto *P* si osservano un campo elettrico di ampiezza $E_B(\theta)$ e un'intensità $I_B(\theta)$ proporzionale a $E_B^2(\theta)$; la luce raggiunge lo schermo passando attraverso un'apertura anulare compresa tra il raggio $D/2$ e il raggio $h/2$.

Notiamo che le aperture costituite dal foro nel disco *A* e dall'anello dovuto alla presenza del disco *B* sono *complementari*, ossia non hanno nessuna zona in comune: se sovrapponiamo i loro effetti è come se ci fosse soltanto l'apertura *G*. Pertanto

$$E_G(\theta) = E_A(\theta) + E_B(\theta) ;$$

d'altra parte $E_G(\theta) = 0$ per $\theta \neq 0$ e concludiamo che

$$E_B(\theta) = -E_A(\theta) , I_B(\theta) = I_A(\theta) \text{ per } \theta \neq 0 .$$

Questo risultato, noto come *principio di Babinet*, stabilisce che, con l'esclusio-

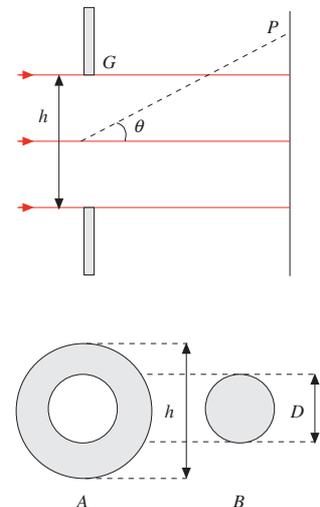


Figura 16.13

Principio di Babinet

ne della direzione $\theta = 0$, la figura di diffrazione prodotta da un disco opaco di diametro D coincide con la figura di diffrazione prodotta da un foro circolare di diametro D praticato in uno schermo opaco. Discuteremo nel paragrafo 16.8 cosa succede per $\theta = 0$.

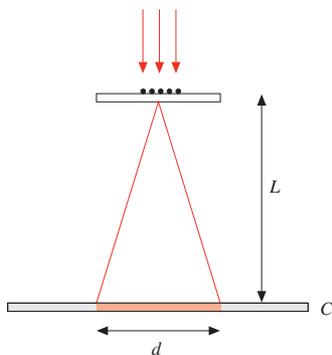


Figura 16.14

Esempio 16.5

In una ristretta zona di un vetrino è depositato un sottile strato di polvere. Il vetrino è illuminato con luce rossa di lunghezza d'onda $\lambda = 0.633 \mu\text{m}$ (laser elio-neon). Su uno schermo C posto a distanza $L = 2 \text{ m}$ dal vetrino si osserva un disco rosso di diametro $d = 15.4 \text{ cm}$. Stimare il diametro D dei granelli di polvere.

Soluzione

Ciascun granello può essere schematizzato come un dischetto opaco di diametro D e sullo schermo si osserva la figura di diffrazione. Applichiamo il principio di Babinet e usiamo le stesse formule dell'esempio 16.4, con L al posto di f :

$$d = 2.44 \lambda \frac{L}{D} \Rightarrow D = 2.44 \lambda \frac{L}{d} = 20 \mu\text{m} .$$

Si vede come la diffrazione possa essere utilizzata per stimare le dimensioni di oggetti opachi. Perché si possa effettuare la misura deve formarsi il primo minimo, che delimita l'immagine, e quindi deve essere soddisfatta secondo (16.6) la condizione

$$\text{sen} \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \leq 1 \Rightarrow \lambda \leq \frac{D}{1.22} .$$

Sono dunque misurabili oggetti di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda della luce; se D è inferiore a $\sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ bisogna ricorrere a radiazioni elettromagnetiche con lunghezza d'onda inferiore, come la radiazione di sincrotrone e i raggi X. Vedremo alcuni esempi nel capitolo 18.

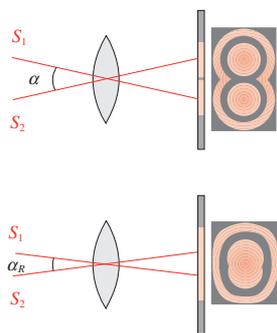


Figura 16.15

16.4 Limite di risoluzione delle lenti

Il fatto che l'immagine di un punto data da una lente sia un dischetto è importante quando si vogliono distinguere due oggetti puntiformi, visti dalla lente sotto un piccolo angolo. La figura 16.15 mostra due sorgenti puntiformi incoerenti S_1 e S_2 , molto lontane, viste dalla lente L sotto un angolo α . Se $\alpha \gg \theta = 1.22 \lambda / D$ non c'è sovrapposizione tra i due dischetti che rappresentano le immagini di S_1 e S_2 e quindi le due sorgenti appaiono distinte ovvero, come si dice, risolte. Al diminuire di α le due figure di diffrazione cominciano a sovrapporsi e ad un certo punto diventa impossibile distinguerle.

Quando S_1 e S_2 sono viste dalla lente sotto un angolo

$$\alpha_R = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (16.8)$$

il primo minimo della figura di diffrazione di una sorgente coincide con il centro del massimo dell'altra sorgente e si dice che le due sorgenti sono appena risolte. Questo criterio di distinzione è noto come *criterio di Rayleigh* ed è comunemente usato in ottica; esso è applicabile anche alle immagini date da una fenditura parallela, senza il fattore 1.22.

L'angolo α_R definito da (16.8) si chiama *angolo minimo risolvibile* e il suo inverso

Criterio di Rayleigh

$$\rho = \frac{1}{\alpha_R} = \frac{D}{1.22 \lambda} \quad (16.9)$$

è detto *potere risolutivo* o *separatore della lente*.

In figura 16.16 sono rappresentate le figure di diffrazione prodotte separatamente dalle due sorgenti in varie situazioni angolari: $\alpha > \alpha_R$ curve risolte, $\alpha = \alpha_R$ curve appena risolte, $\alpha < \alpha_R$ curve non risolte. La linea tratteggiata mostra l'intensità totale, ottenuta come somma dei due contributi.

Nel capitolo 17 descriveremo il funzionamento di alcuni strumenti ottici fondamentali, quali il telescopio, il microscopio e lo stesso occhio umano. Un aspetto qualificante è la capacità di separare, cioè di osservare come distinti, due punti luminosi separati, siano essi due stelle o due parti di una piccola struttura. Una conseguenza della discussione svolta finora è che una delle principali cause che limita la risoluzione di una lente è la diffrazione, fatto intrinseco in quanto legato alla natura ondulatoria della luce e quindi non eliminabile.

Esaminiamo adesso il potere separatore per i tre strumenti suddetti, considerati come semplici lenti di apertura D e focale f .

Potere separatore di un telescopio

Il potere separatore (16.9) non dipende dalla distanza focale della lente, ma soltanto dalla sua apertura, e migliora al crescere di questa.

La stessa formula è valida quando il fascio luminoso, invece di essere rifratto da una lente, è riflesso da uno specchio sferico di apertura D e focale f . Il maggior telescopio ottico a riflessione del mondo, situato sul Monte Palomar negli USA, ha $D = 5$ m: con $\lambda = 0.589 \cdot 10^{-6}$ m

$$\alpha_R = 1.44 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.03'' \quad , \quad \rho = \frac{1}{\alpha_R} = 6.95 \cdot 10^6 \text{ rad}^{-1} \quad .$$

Sia α_R che ρ dipendono dalla lunghezza d'onda, essendo peggiori le prestazioni con luce rossa e migliori con luce violetta:

$$\lambda_R = 0.7 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad , \quad \alpha_R = 1.71 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \quad , \quad \rho = 5.85 \cdot 10^6 \text{ rad}^{-1} \quad ,$$

$$\lambda_V = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad , \quad \alpha_R = 0.98 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \quad , \quad \rho = 1.03 \cdot 10^7 \text{ rad}^{-1} \quad .$$

Potere separatore di un microscopio

In un microscopio invece della separazione angolare è più conveniente specificare la distanza minima s tra due punti distinguibili. Se i due punti sono nel piano focale anteriore dell'obiettivo (vedi paragrafo 17.8), essi sono visti sotto l'angolo $\theta = s/f$; utilizzando per θ il valore numerico α_R otteniamo

$$s = f \alpha_R = 1.22 \lambda \frac{f}{D} = 0.61 \lambda \frac{f}{R} \quad .$$

Questa relazione viene scritta di solito in funzione dell'angolo ϕ di accettazione dell'obiettivo, definito da $\text{sen} \phi = R/f$, per cui

$$s = \frac{0.61 \lambda}{\text{sen} \phi} = \frac{0.61 \lambda_0}{n \text{sen} \phi} \quad ,$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto della possibilità che l'oggetto e la parte frontale dello strumento siano immersi in un mezzo con indice di rifrazione n ; λ è la lunghezza d'onda in questo mezzo e λ_0 la lunghezza d'onda nel vuoto della luce usata per illuminare l'oggetto. Il

Potere risolutivo

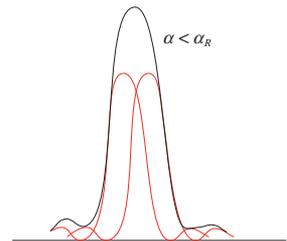
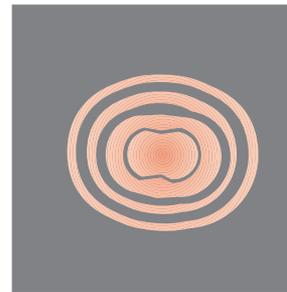
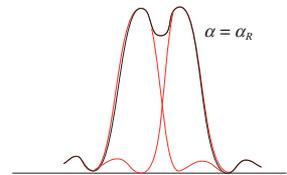
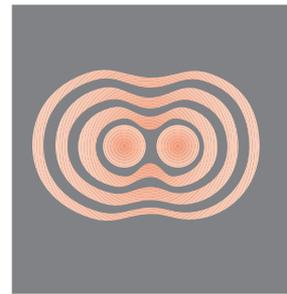
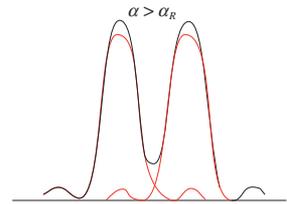


Figura 16.16

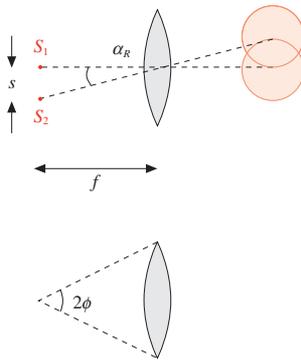


Figura 16.17

prodotto $n \sin \phi$ si chiama *apertura numerica* A_n dello strumento e in definitiva abbiamo, per la minima distanza s risolvibile e per il suo inverso, detto *potere risolutivo lineare*,

$$s = \frac{0.61 \lambda_0}{A_n}, \quad \rho_l = \frac{1}{s} = \frac{A_n}{0.61 \lambda_0}.$$

Un valore tipico di A_n è 1.4 e con $\lambda_0 = 0.55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ $s = 0.24 \text{ }\mu\text{m}$, $\rho_l = 4.2 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$. Anche in questo caso le prestazioni dipendono dalla lunghezza d'onda e sono migliori con luce violetta.

Potere separatore dell'occhio umano

Il diametro della pupilla dell'occhio umano varia all'incirca tra i limiti $D = 8 \text{ mm}$ e $D = 2 \text{ mm}$ (vedi paragrafo 17.8); con luce di lunghezza d'onda $\lambda_0 = 0.55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ si ha da (16.8)

$$0.84 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \leq \alpha_R \leq 3.36 \cdot 10^{-4} \text{ rad}.$$

Nel caso più sfavorevole, $D = 2 \text{ mm}$, la minima distanza tra due punti ancora distinguibili dall'occhio, posti alla distanza $L = 25 \text{ cm}$ detta di *visione distinta*, è

$$s = L \alpha_R = 250 \cdot 3.36 \cdot 10^{-4} = 84 \text{ }\mu\text{m}.$$

Con $D = 8 \text{ mm}$ si troverebbe $s = 21 \text{ }\mu\text{m}$.

Sperimentalmente il potere separatore angolare dell'occhio è più vicino a $4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ e la distanza s appena calcolata risulta di circa $100 \text{ }\mu\text{m}$; l'occhio cioè non arriva a $s = 20 \text{ }\mu\text{m}$, come dovrebbe in base alla sola diffrazione. Questo fatto dipende dalla struttura granulare dell'elemento sensibile, la *retina*, posta nella parte posteriore dell'occhio: essa è costituita da piccoli sensori, i *coni* e i *bastoncelli*, che ricevono l'immagine trasmessa dal cristallino e la inviano al cervello tramite il *nervo ottico*; due punti sono visti come distinti quando la luce da essi emessa colpisce due sensori diversi. Non basta quindi che i dischetti di diffrazione siano appena risolvibili, come si è implicitamente ammesso per il telescopio e il microscopio, supponendo di avere nel piano focale un mezzo di rivelazione in grado di distinguere le due immagini. Occorre, nell'occhio, che i dischetti di diffrazione abbiano raggio paragonabile alla distanza s' tra i sensori: questa condizione fissa la risoluzione. Ora è veramente notevole che la distanza tra i coni nella parte più sensibile della retina, la *fovea*, valga circa $10 \text{ }\mu\text{m}$ e che il raggio dei dischetti di diffrazione, con $D = 2 \text{ mm}$, sia anch'esso di circa $10 \text{ }\mu\text{m}$: la *granularità della retina* è perfettamente corrispondente al potere risolutivo del cristallino, nel senso che due punti risolvibili secondo il criterio di Rayleigh producono dischetti che interessano due sensori distinti. D'altra parte, quando $D = 8 \text{ mm}$, i dischetti di diffrazione di due punti risolvibili secondo Rayleigh ($s = 20 \text{ }\mu\text{m}$) sono sì ridotti, ma sono più vicini e non colpiscono due sensori distinti: la risoluzione del cristallino non trova corrispondenza in quella della retina, che non distingue i due punti.

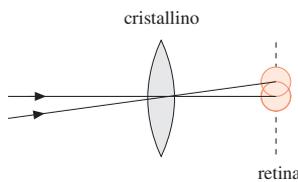


Figura 16.18

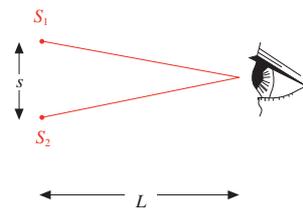


Figura 16.19

Esempio 16.6

Determinare qual è la distanza L dall'occhio umano alla quale di notte appaiono distinti i fari di un'automobile, separati tra loro da $s = 1.4 \text{ m}$. Si assuma $D = 2 \text{ mm}$ e $\lambda_0 = 0.55 \text{ }\mu\text{m}$.

Soluzione

Per effetto della diffrazione l'angolo minimo di risoluzione è $\alpha_R = 3.3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ come calcolato sopra e quindi

$$L = s / \alpha_R = 4.17 \text{ km}.$$

Con il valore medio $\alpha_R \sim 4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ risulta $L = 3.5 \text{ km}$; invece se fosse $\alpha_R = 0.84 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ si otterrebbe $L = 16.7 \text{ km}$, certamente non corrispondente all'esperienza.

16.5 Reticolo di diffrazione

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato la diffrazione di Fraunhofer prodotta da un'apertura rettangolare o circolare e da un disco opaco. Se disponiamo in modo regolare N fenditure rettilinee, ciascuna di larghezza a , equispaziate di una distanza d , realizziamo un sistema di N sorgenti, la cui interferenza abbiamo già studiato nel paragrafo 15.5 e nel quale dobbiamo però introdurre il fatto che a causa della diffrazione l'intensità emessa da ciascuna sorgente ha l'andamento descritto nel paragrafo 16.2.

Il dispositivo, chiamato *reticolo di diffrazione*, si può realizzare tracciando delle linee parallele molto sottili su una lastra di vetro per mezzo di un opportuno utensile; lo spazio che rimane tra una linea e la successiva costituisce una fenditura. La distanza d tra due fenditure è detta *passo* del reticolo e la larghezza complessiva è Nd .

Nella figura 16.20 un'onda piana di lunghezza d'onda λ incide sul reticolo, che sta in un piano d'onda (l'incidenza cioè è normale); dopo il reticolo si pone una lente convergente e si osserva la figura di interferenza nel piano focale della lente. Fissato un punto P sullo schermo, individuato dall'angolo θ , l'intensità in P si calcola con (15.21), in cui l'intensità $I_1(\theta)$ della singola fenditura è data dalla (16.3) che riscriviamo:

$$I_1(\theta) = I_0 \left[\frac{\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}} \right]^2 ;$$

I_0 è l'intensità a $\theta = 0$ ed è stato trascurato il contributo del fattore di inclinazione $f(\theta)$, non importante per le considerazioni che vogliamo svolgere. Pertanto l'intensità in P è

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{N \pi d \sin\theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}} \right]^2 ; \quad (16.10) \quad \text{Intensità}$$

Questa funzione è rappresentata nella figura 16.21 con $N = 8$, come nel terzo caso della figura 15.27; usualmente si sintetizza il risultato dicendo che l'intensità della figura di interferenza è modulata dalla diffrazione.

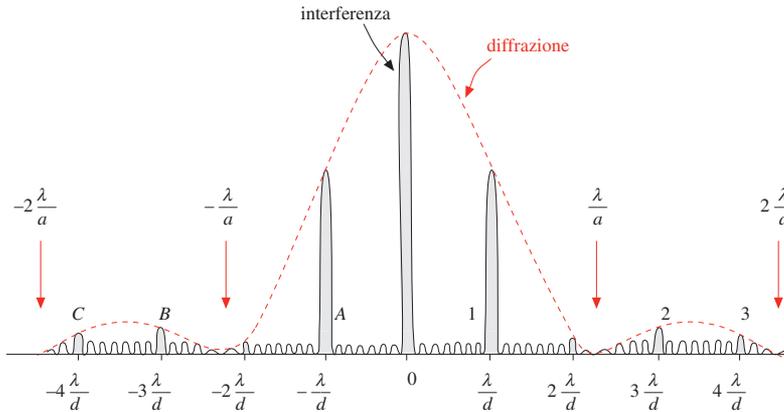


Figura 16.21

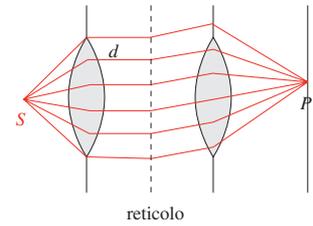


Figura 16.20

Riprendendo i punti salienti già enunciati nel paragrafo 15.5, precisiamo le caratteristiche dell'intensità trasmessa da un reticolo di diffrazione.

a) I *massimi principali* si hanno lungo le direzioni (15.22),

Massimi principali

$$\operatorname{sen}\theta_m = m \frac{\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16.11)$$

b) La distanza angolare tra un massimo principale e il minimo ad esso adiacente è, secondo (15.26),

$$\Delta(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\lambda}{Nd} = \frac{\lambda}{L} \quad ,$$

detta L la larghezza del reticolo. Si può porre $\Delta(\operatorname{sen}\theta) = \cos\theta \Delta\theta$, dato che $\lambda \ll L$ e quindi la variazione è piccola; abbiamo allora per la *larghezza angolare di un massimo principale*

Larghezza angolare del massimo

$$\Delta\theta_m = 2\Delta\theta = \frac{2\lambda}{L \cos\theta_m} = \frac{2\lambda}{Nd \cos\theta_m} \quad ; \quad (16.12)$$

maggiore è il numero di fenditure del reticolo, più strette sono le frange prodotte.

c) L'intensità della frangia centrale ($m = 0$) aumenta proporzionalmente a N^2 ; l'intensità degli altri massimi è invece ridotta a causa della diffrazione: sostituendo (16.11) in (16.10) abbiamo in corrispondenza ad un valore $m \neq 0$ che

Intensità dei massimi principali

$$R_m = \frac{I_{\max}(m)}{I_{\max}(m=0)} = \left[\frac{\operatorname{sen} m \pi \frac{a}{d}}{m \pi \frac{a}{d}} \right]^2 \quad . \quad (16.13)$$

Il rapporto R_m dipende dunque dal rapporto tra la larghezza a delle fenditure e la loro distanza d . In particolare quando un minimo di diffrazione coincide con un massimo di interferenza, cioè quando per lo stesso valore di θ sono soddisfatte le due condizioni

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \quad , \quad a \operatorname{sen}\theta = m_a\lambda \quad ,$$

il rapporto a/d vale m_a/m e R_m risulta eguale a zero: non si ha il massimo di ordine $m = m_a(d/a)$. Nella figura 16.21 la condizione di scomparsa di una frangia è approssimativamente realizzata per $m = 4$, $m_a = 2$ e pertanto nel reticolo cui la figura si riferisce $a \approx d/2$: la larghezza è circa pari alla metà del passo. Notiamo anche che la figura 16.21, per comodità di spiegazione, non è esattamente in scala: sappiamo infatti che l'intensità del primo massimo secondario di diffrazione è all'incirca il 4% di quella della frangia centrale, mentre nel disegno è $\sim 10\%$.

Un valore tipico della densità di linee in un reticolo è 4000 linee/cm: ad esempio con una larghezza $L = 2.5$ cm si hanno $N = 10^4$ linee con passo $d = L/N = 2.5 \mu\text{m}$; la larghezza delle singole fenditure è dell'ordine di $1 \mu\text{m}$. Il valore massimo di densità raggiunge 10^4 linee/cm ($d = 1 \mu\text{m}$, $a < 1 \mu\text{m}$); le linee vengono tracciate con una punta di diamante il cui movimento è comandato da una macchina utensile molto

precisa. Tale metodo di produzione di reticoli di grande precisione è stato sviluppato da Rowland verso il 1880.

Esempio 16.7

Un reticolo di diffrazione contiene $N = 4000$ linee su una larghezza $L = 2$ cm; la larghezza delle fenditure è $a = 1 \mu\text{m}$. La luce di lunghezza d'onda $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ trasmessa dal reticolo viene osservata nel piano focale di una lente con $f = 20$ cm. Calcolare la posizione delle frange osservate, la loro larghezza e la loro intensità relativa all'intensità della frangia centrale.

Soluzione

Il passo del reticolo è $d = L/N = 5 \mu\text{m}$ e $a/d = 1/5 = 0.2$. Per effetto della sola interferenza si dovrebbero osservare 20 massimi principali oltre al massimo di ordine zero:

$$\text{sen}\theta_m = m \frac{\lambda}{d} = 0.1 m \quad , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10 \quad .$$

Invece a causa della diffrazione risulta da (16.13) $R_5 = R_{10} = 0$ e $R_6, \dots, R_9 \leq 0.04$; pertanto in condizioni normali vengono osservati solamente il massimo centrale e gli otto massimi simmetricamente adiacenti.

Nella tabella sono riportati gli angoli θ_m ai quali si osservano i massimi, le larghezze angolari (16.12), le posizioni sullo schermo $z_m = f \tan\theta_m$, le larghezze $\Delta z_m = f \Delta\theta$ delle frange e le intensità relative R_m .

m	$\text{sen}\theta_m$	θ_m (gradi)	$\Delta\theta$ (rad)	z_m (cm)	Δz_m (μm)	R_m
0	0	0	$5 \cdot 10^{-4}$	0	10	1
1	0.1	5.74	$5.03 \cdot 10^{-4}$	2.01	10.06	0.88
2	0.2	11.54	$5.10 \cdot 10^{-4}$	4.08	10.20	0.57
3	0.3	17.46	$5.24 \cdot 10^{-4}$	6.29	10.48	0.25
4	0.4	23.58	$5.46 \cdot 10^{-4}$	8.73	10.92	0.05

L'immagine è una serie di 9 righe luminose molto sottili ($\sim 10 \mu\text{m}$), ben distanziate, con intensità decrescente, su uno sfondo nero.

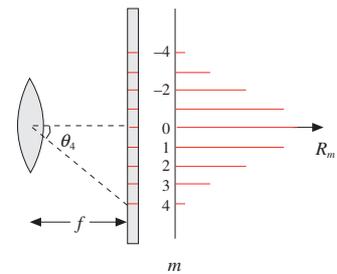
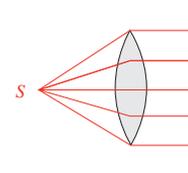


Figura 16.22

Esempio 16.8

In un esperimento di Young le due fenditure distano $d = 30 \mu\text{m}$ e sono larghe $a = 3 \mu\text{m}$. Determinare il numero di frange effettivamente osservabili nell'ipotesi che si riescano a rivelare solo intensità luminose superiori al 5% dell'intensità della frangia di ordine zero.

Soluzione

Ponendo $n = 2$ nella (16.10) si ottiene

$$I(\theta) = 4 I_0 \left[\frac{\text{sen} \frac{\pi a \text{sen}\theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \text{sen}\theta}{\lambda}} \right]^2 \cos^2 \frac{\pi d \text{sen}\theta}{\lambda} \quad ,$$

che differisce dalla (15.14) per il termine tra parentesi dovuto alla diffrazione a ciascuna delle fenditure. Quando a è molto minore di λ si ha

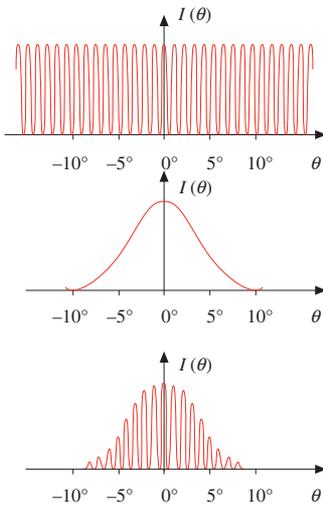


Figura 16.23

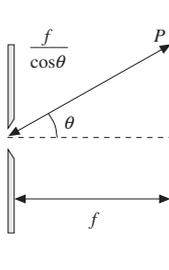


Figura 16.24

$$\lim_{a/\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\text{sen} \frac{\pi a \text{sen} \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \text{sen} \theta}{\lambda}} \right]^2 = 1$$

e si ritrova appunto la (15.14), dedotta nell'ipotesi che l'intensità di ciascuna sorgente fosse costante al crescere di θ .

Nella figura 16.23, calcolata numericamente per $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, sono riportati separatamente i vari termini. Poiché $a/d = 1/10$ la decima frangia è assente; le frange corrispondenti a $m = 8$ e $m = 9$ hanno, applicando (16.13), $R_8 = 0.055$ e $R_9 = 0.012$. Sono così osservabili, nell'ipotesi $R_m > 0.05$, la frangia centrale e $8 \times 2 = 16$ frange laterali. È dunque la diffrazione dovuta all'apertura finita delle fenditure la causa fisica principale che limita l'osservazione di un gran numero di frange d'interferenza.

Gli altri fattori correttivi finora trascurati interverrebbero solamente se si potessero osservare frange ad angoli molto grandi. Essi sono dovuti al fattore di inclinazione e alla maggior distanza dalla fenditura dei punti dello schermo lontani dal centro; nell'ipotesi che una fenditura emetta un'onda cilindrica, l'intensità diminuisce come $1/r$ e rispetto al centro invece che $1/f$ ci vuole $1/(f \cos \theta) = \cos \theta / f$, come si vede nella figura 16.24. Complessivamente il fattore di riduzione angolare risulta $f^2(\theta) \cos \theta$; alcuni valori sono riportati nella tabella.

θ	$f^2(\theta)$	$\cos \theta$	$f^2(\theta) \cos \theta$
0°	1	1	1
5°	0.996	0.996	0.992
15°	0.966	0.966	0.933
30°	0.871	0.866	0.754
45°	0.729	0.707	0.515
60°	0.563	0.500	0.282

Per valori piccoli di θ la correzione è quasi trascurabile (< 1% fino a 5.7°, < 5% fino a 12.9°), c'è solo l'effetto della diffrazione.

Il reticolo descritto finora è detto *reticolo funzionante in trasmissione*; se le incisioni vengono fatte su una superficie riflettente abbiamo un reticolo funzionante in riflessione, per il quale si svolgono considerazioni analoghe.

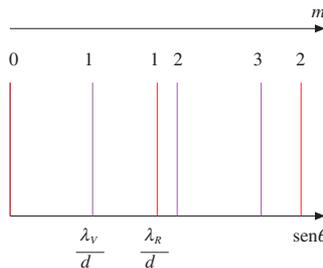


Figura 16.25

16.6 Potere dispersivo e potere risolutivo di un reticolo di diffrazione

Se la sorgente che illumina il reticolo non emette luce monocromatica, le differenti lunghezze d'onda che compongono la luce incidente producono massimi principali ad angoli diversi, in quanto la (16.11) dipende dalla lunghezza d'onda; solo il massimo di ordine zero si forma a $\theta = 0$ per tutte le lunghezze d'onda.

Questa dipendenza dell'angolo di formazione dei massimi dalla lunghezza d'onda si chiama dispersione angolare, in analogia con la dispersione che si verifica nella trasmissione attraverso una superficie di discontinuità dell'indice di rifrazione, anche se si tratta di fenomeni ben diversi.

Fissato un valore dell'ordine m , l'insieme dei massimi che si formano per le diverse lunghezze d'onda prende il nome di spettro di ordine m , per cui si ha uno spettro del prim'ordine ($m = 1$), uno del secondo ordine ($m = 2$) e così via.

Quando l'illuminazione è in luce bianca, nella quale si trovano con continuità tutte le lunghezze d'onda comprese tra il viola $\lambda_v = 0.4 \mu\text{m}$ e il rosso $\lambda_R = 0.7 \mu\text{m}$, lo spettro del prim'ordine è l'unico cosiddetto *puro*, dato che ad un certo angolo cor-

risponde un solo colore (questo perché $\lambda_R < 2\lambda_V$). Invece negli spettri di ordine superiore si ha sovrapposizione tra spettri di ordine diverso. Ad esempio, nella direzione θ_2 alla quale si osserva il massimo del secondo ordine della luce rossa si osserva contemporaneamente il massimo del terzo ordine per la lunghezza d'onda λ tale che

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{2\lambda_R}{d} = \frac{3\lambda}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}\lambda_R \approx 0.47 \mu\text{m} ,$$

corrispondente al colore blu. Per questo motivo ai lati dei due spettri del prim'ordine, simmetrici rispetto al massimo di ordine zero e caratterizzati da una successione di colori dal violetto al rosso ($\text{sen}\theta_{1,V} < \text{sen}\theta_{1,R}$), non si vede riprodotta la stessa successione di colori.

Da quanto detto risulta evidente la capacità del reticolo di diffrazione di analizzare la composizione della luce che lo colpisce, proprietà sfruttata per studiare le caratteristiche della sorgente luminosa. Allo scopo di discutere tale proprietà introduciamo il potere dispersivo e il potere risolutivo del reticolo.

Potere dispersivo di un reticolo

Date due onde monocromatiche le cui lunghezze d'onda differiscono di $d\lambda$, i due massimi principali dello stesso ordine si formano a due angoli che differiscono di $d\theta$. Si definisce come *potere dispersivo* o semplicemente *dispersione* di un reticolo la grandezza

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{d} \frac{m}{\cos\theta_m} , \quad (16.14) \quad \text{Dispersione}$$

dove l'ultima eguaglianza è stata ottenuta ricorrendo a (16.11). La dispersione aumenta al diminuire del passo del reticolo e , e per un dato reticolo, all'aumentare dell'ordine dello spettro.

Potere risolutivo di un reticolo

Per distinguere onde luminose con lunghezze d'onda molto vicine i massimi principali relativi a queste lunghezze d'onda devono avere larghezza angolare più piccola possibile. Il *potere risolutivo* si definisce seguendo il criterio di Rayleigh, utilizzato nel paragrafo 16.3 per definire il potere separatore di una lente.

Consideriamo due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 , con $\lambda_2 > \lambda_1$, e un reticolo di passo d con N fenditure; i massimi principali di ordine m e i minimi ad essi adiacenti si formano agli angoli

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta_{m,1} &= m \frac{\lambda_1}{d} , & \text{sen}\theta'_{m,1} &= m \frac{\lambda_1}{d} \pm \frac{\lambda_1}{Nd} , \\ \text{sen}\theta_{m,2} &= m \frac{\lambda_2}{d} , & \text{sen}\theta'_{m,2} &= m \frac{\lambda_2}{d} \pm \frac{\lambda_2}{Nd} . \end{aligned}$$

I due massimi sono appena risolvibili quando sono soddisfatte le condizioni

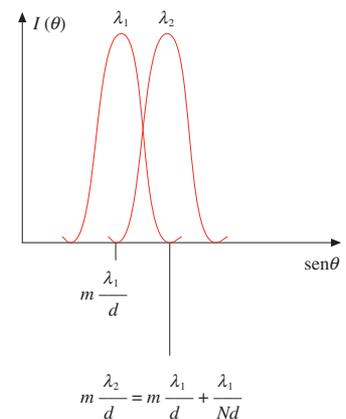


Figura 16.26

$$m \frac{\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_1}{Nd} \approx m \frac{\lambda_2}{d} \Rightarrow m(\lambda_2 - \lambda_1) \approx \frac{\lambda_1}{N} ,$$

$$m \frac{\lambda_1}{d} \approx m \frac{\lambda_2}{d} - \frac{\lambda_2}{Nd} \Rightarrow m(\lambda_2 - \lambda_1) \approx \frac{\lambda_2}{N} .$$

Sommando si ottiene $m(\lambda_2 - \lambda_1) \approx (\lambda_1 + \lambda_2) / 2N$; si pone $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2) / 2$, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ e si definisce *potere risolutivo* del reticolo all'ordine m la grandezza

Potere risolutivo

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad , \quad (16.15)$$

la quale esprime, per una data λ , la differenza $\Delta\lambda$ risolvibile. Il *potere risolutivo* risulta *proporzionale al numero totale di fenditure* e aumenta con l'ordine dello spettro, ma non dipende dal passo del reticolo.

Osserviamo che la dispersione e il potere risolutivo si riferiscono a proprietà diverse: un reticolo con passo piccolo ha una buona dispersione, ma se è piccolo anche il numero di fenditure (al limite $N = 2$) esso non è adatto a separare lunghezze d'onda molto vicine: i centri dei massimi sono ben distanziati, ma i massimi stessi sono larghi. Invece un reticolo con passo maggiore, ma con un gran numero di fenditure, ha dispersione minore e potere risolutivo superiore, essendo i massimi molto stretti.

Nella figura 16.27 sono riportate le intensità dei massimi di ordine m di due lunghezze d'onda, generati da due reticoli aventi la stessa dispersione e potere risolutivo diverso; tali reticoli hanno evidentemente passo eguale e differiscono per il numero totale di fenditure ovvero per la larghezza: $N_1 > N_2$, $L_1 = N_1 d > L_2 = N_2 d$. È chiaro che con d piccolo e N grande si ha il risultato migliore sia per D che per R .

C'è da dire infine che malgrado la dispersione e la risoluzione non dipendano esplicitamente dalla larghezza a delle fenditure, questo parametro fissa in pratica il massimo valore di m utilizzabile e quindi i massimi valori di D e R , come si è visto nella discussione sull'intensità degli spettri di ordine superiore (paragrafo 16.5).

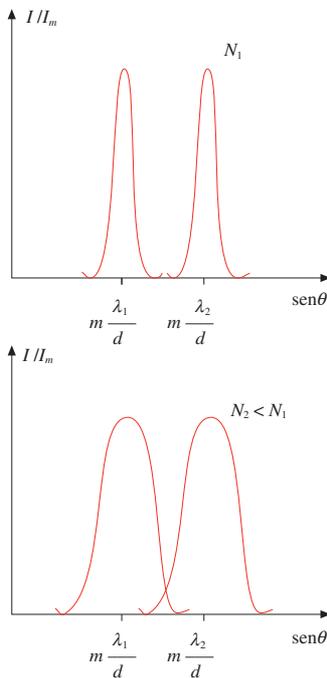


Figura 16.27

Esempio 16.9

Una lampada al sodio, contenente sodio gassoso eccitato con una scarica elettrica, emette due lunghezze d'onda molto vicine, di valori $\lambda_1 = 589.0$ nm e $\lambda_2 = 589.6$ nm. Quante linee deve avere un reticolo affinché λ_1 e λ_2 siano appena risolvibili nello spettro del second'ordine?

Soluzione

Si richiede un potere risolutivo

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589.3}{0.6} = 982 \approx 10^3 .$$

Da (16.15) con $m = 2$ si ricava $N = 500$.

Esempio 16.10

Un reticolo di diffrazione lungo $L = 2.5$ cm ha $N = 4000$ fenditure. Esso è illuminato con una luce verde di lunghezza d'onda $\lambda = 0.546$ μm , emessa da una lampada a vapori di mercurio. Calcolare il potere dispersivo al second'ordine e la minima differenza $\Delta\lambda$ nell'intorno di λ che è risolvibile, sempre al second'ordine.

Soluzione

Il passo del reticolo è $d = 6.25$ μm e il massimo del second'ordine si forma per $\sin\theta_2 = 2\lambda / d = 0.175$, per cui $\theta_2 = 0.176$ rad = 10.1. La larghezza angolare (16.12) vale

$$\Delta\theta_2 = \frac{2\lambda}{L \cos\theta_2} = 4.4 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ gradi} .$$

Il potere dispersivo e il potere risolutivo al second'ordine sono

$$D = \frac{2}{d \cos\theta_2} = 0.325 \text{ rad}/\mu\text{m} = 18.6 \text{ gradi}/\mu\text{m} , \quad R = 2 \cdot 4000 = 8 \cdot 10^3 .$$

L'intervallo $\Delta\lambda$ che si può risolvere vale

$$\Delta\lambda = \lambda / R = 6.83 \cdot 10^{-5} \text{ mm} = 6.83 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$$

$$(\Delta\lambda / \lambda = 1.25 \cdot 10^{-4}) .$$

Utilizzando i valori trovati di $\Delta\lambda$ e della dispersione D si ha, per la separazione angolare corrispondente a $\Delta\lambda$,

$$\Delta\theta = D \Delta\lambda = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

e si verifica che questo valore, essendo pari a metà della larghezza angolare $\Delta\theta_2$ prima calcolata, è giustamente la separazione angolare che ci sarebbe tra due massimi dovuti alle lunghezze d'onda λ e $\lambda + \Delta\lambda$ in condizioni di Rayleigh.

16.7 Spettroscopia con il reticolo di diffrazione

I reticoli di diffrazione hanno un'utilizzazione molto importante nell'analisi della radiazione elettromagnetica visibile emessa dalle varie sostanze opportunamente eccitate, *analisi* che viene chiamata *spettroscopica*.

L'apparecchio usato per la misura delle lunghezze d'onda emesse da una sorgente è mostrato schematicamente in figura 16.28; esso costituisce un esempio di spettroscopia a reticolo di diffrazione.

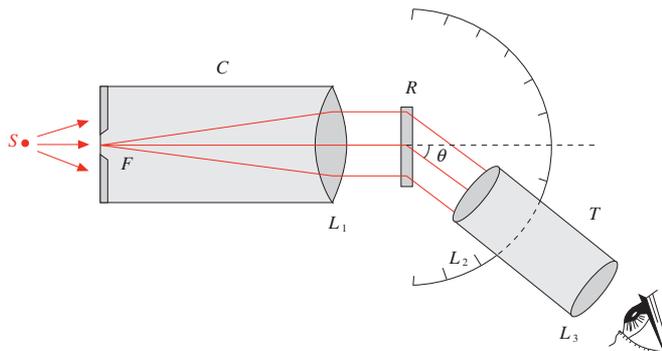


Figura 16.28

La luce emessa dalla sorgente S passa attraverso una sottile fenditura F posta nel piano focale della lente L_1 ; l'insieme fenditura-lente costituisce il *collimatore* C . Da L_1 emerge un fascio di raggi paralleli che incide ortogonalmente sul reticolo R . I raggi trasmessi dal reticolo secondo una certa direzione θ sono focalizzati dal sistema di lenti L_2 e L_3 che costituiscono il *telescopio* T e possono essere osservati direttamente con l'occhio. Muovendo il telescopio non si osserva nulla a meno che esso non sia posizionato secondo una direzione θ_λ che soddisfa alla (16.11):

$$\text{sen}\theta_\lambda = m \frac{\lambda}{d} .$$

Noto il passo d del reticolo, misurato l'angolo θ_λ con un goniometro di precisione e individuato l'ordine m , si determina il valore della lunghezza d'onda.

In corrispondenza ad ogni angolo θ_λ si osserva una *riga colorata*, caratteristica della lunghezza d'onda λ , che è l'*immagine della fenditura F data dallo spettroscopio*; a questa riga si dà il nome di *riga spettrale* (si veda la nota alla fine del paragrafo). L'insieme delle righe spettrali forma lo *spettro di emissione della sostanza* che costituisce la sorgente. Gli spettri di emissione si distinguono in:

1) *spettri a righe* corrispondenti ad una successione discreta di lunghezze d'onda e quindi di righe spettrali;

2) *spettri a bande* nei quali le righe sono addensate con continuità nell'intorno di certe lunghezze d'onda, formando delle bande di lunghezze d'onda tra loro separate;

3) *spettri continui*, consistenti in una successione continua di lunghezze d'onda all'interno di un intervallo relativamente largo.

Gli spettri a righe e gli spettri a bande sono emessi da *gas e vapori a pressione non troppo elevata*; i primi sono dovuti ad atomi isolati, i secondi a molecole biatomiche o pluriatomiche. L'eccitazione può essere provocata dall'alta temperatura di una fiamma, come avviene ad esempio bruciando il sodio, oppure dal passaggio di corrente elettrica, come si realizza nelle lampade a scarica contenenti idrogeno, elio, neon, mercurio, sodio. Nella figura 16.29 sono riportati gli spettri a righe per l'idrogeno monoatomico, l'elio, il sodio e il mercurio.

Gli *spettri a righe e a bande sono caratteristici degli elementi che li emettono*; non vi sono spettri comuni a due elementi e neppure singole righe. Su questo fatto è basata l'analisi spettroscopica per il riconoscimento degli elementi. Come avremo modo di approfondire nel capitolo 18, lo spettro di emissione a righe è una conseguenza diretta della struttura dell'atomo, in cui gli elettroni possono occupare stati di energia quantizzati (vedi paragrafi 2.3 e 13.8). La conoscenza dello spettro di emissione di un atomo permette così di avere una conoscenza diretta dei *livelli energetici*.

Spettri d'emissione

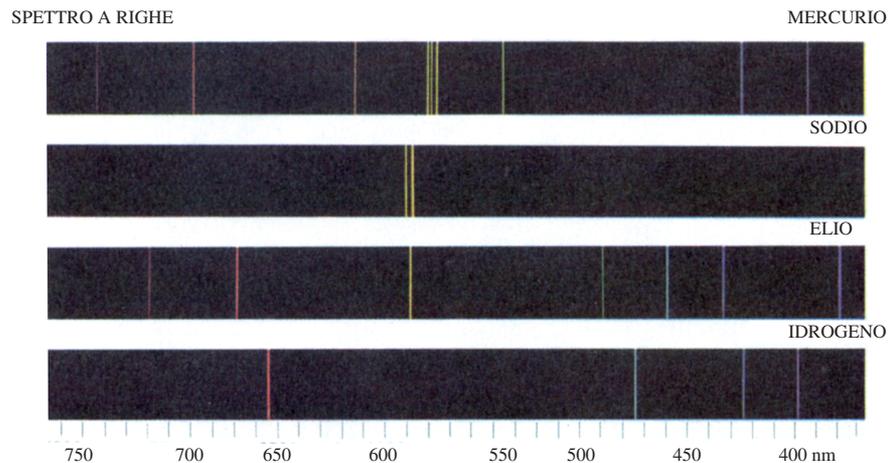


Figura 16.29

Gli spettri continui sono invece emessi da solidi e liquidi portati a temperatura elevata; un esempio sono i filamenti delle comuni lampadine a incandescenza (vedi figura 13.41). Le caratteristiche di questi spettri di emissione dipendono dalla temperatura di equilibrio e anzi si può dire con buona approssimazione che ad una stessa temperatura tutti i corpi hanno lo stesso spettro di emissione.

Il *deuterio*, isotopo dell'idrogeno con il nucleo formato da un protone e da un neutrone invece che da un solo protone, venne scoperto nel 1932 analizzando con uno spettroscopio a reticolo lo spettro di una lampada contenente idrogeno. Accanto alla riga azzurra con $\lambda = 486.1$ nm, tipica dell'idrogeno, venne osservata per la prima volta una riga molto debole, separata soltanto di 0.13 nm, correttamente interpretata come il segnale della presenza, in piccola percentuale, di una diversa specie atomica. Il potere risolutivo necessario per questa misura è dell'ordine di $4 \cdot 10^3$.

Spettri di assorbimento

Se esaminiamo con uno spettrometro a reticolo la luce emessa da un filamento incandescente e puntiamo il telescopio nella regione angolare corrispondente alle direzioni dello spettro del prim'ordine, osserviamo una striscia continua di colori dal violetto al rosso. Supponiamo ora di interporre tra la lampada e il reticolo un recipiente di vetro trasparente riempito ad esempio con vapori di sodio: lo spettro

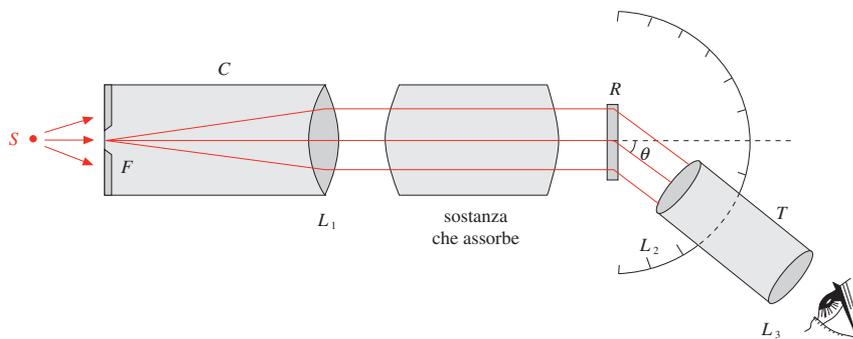


Figura 16.30

continuo colorato appare solcato da due linee nere, in una posizione che corrisponde alle due lunghezze d'onda citate nell'esempio 16.9. Si dice che il sodio ha *assorbito* le due lunghezze d'onda e le due linee nere vengono chiamate *righe di assorbimento*. Interponendo varie sostanze si osserva ogni volta una serie diversa di righe di assorbimento che nel loro complesso costituiscono uno *spettro di assorbimento*.

Spettri di assorbimento

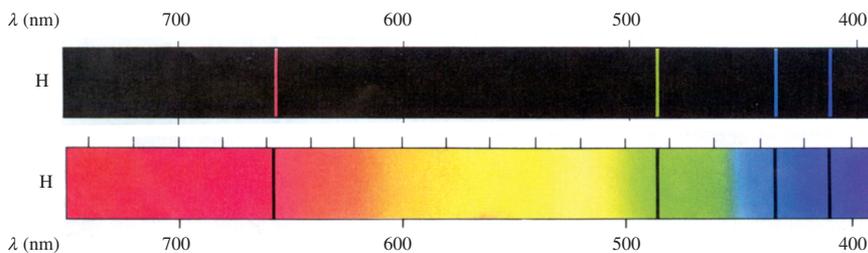


Figura 16.31

Regola di Kirchhoff

Anche l'assorbimento è dovuto agli atomi e alle molecole della sostanza interposta e di nuovo gli spettri sono rispettivamente a righe e a bande. Nella figura 16.31 si osserva una corrispondenza tra righe di assorbimento e righe di emissione e a questo proposito vale la *regola di Kirchhoff*, giustificata nel capitolo 18, secondo cui ogni sostanza è in grado di assorbire le radiazioni che, nelle stesse condizioni, è capace di emettere.

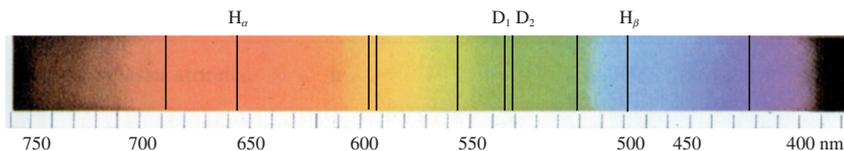


Figura 16.32 Tra le righe di Fraunhofer sono indicate in particolare due righe dell'idrogeno e due del sodio.

La figura 16.32 mostra lo spettro solare: in esso si osservano un gran numero di righe nere (*righe di Fraunhofer*) che rappresentano lo spettro di assorbimento dell'insieme degli elementi presenti sulla superficie solare (*cromosfera*) su un fondo continuo che corrisponde all'emissione di un corpo alla temperatura $T \approx 6000$ K. Anche gli spettri di assorbimento possono quindi essere utilizzati per il riconoscimento degli elementi.

La radiazione assorbita dagli atomi della sostanza interposta viene da questi diffusa in tutte le direzioni, indipendentemente dalla direzione di propagazione della luce incidente (possiamo riferirci al meccanismo descritto nel paragrafo 13.6). Lo si verifica facilmente analizzando ad esempio la luce diffusa dai vapori di sodio prima citati, nella quale si ritrovano principalmente le due lunghezze d'onda corrispondenti alle righe di assorbimento.

Nota. Larghezza delle righe spettrali

Abbiamo già detto nel paragrafo 12.10 che l'emissione luminosa da parte di un atomo può essere rappresentata con un pacchetto d'onde di durata $\Delta t \approx 10^{-8}$ s nel quale sono necessariamente presenti molte lunghezze d'onda in un intervallo $\Delta\lambda$ centrato intorno al valor medio λ , con $\Delta\lambda / \lambda \approx 10^{-7}$. L'argomento classico è confermato dalla trattazione quantistica, che porta ai valori suddetti.

Ad un certo intervallo $\Delta\lambda$ è associata, in base a (16.11), una variazione $\Delta\theta_\lambda$ dell'angolo θ_λ al quale si osserva il massimo di ordine m e in prima approssimazione, se gli angoli sono piccoli, possiamo porre

$$\Delta\theta_\lambda \approx \frac{m}{d} \Delta\lambda \quad .$$

Confrontiamo questa *larghezza* $\Delta\theta_\lambda$, che è *intrinseca della riga* e si può chiamare *larghezza naturale* della riga, con la *larghezza strumentale* (16.12) introdotta dal reticolo:

$$\frac{\Delta\theta_\lambda}{\Delta\theta} = \frac{m}{d} \Delta\lambda \frac{Nd}{2\lambda} = m N \frac{\Delta\lambda}{2} \frac{1}{\lambda} = m N 0.5 \cdot 10^{-7} \quad .$$

In un reticolo con $N = 10^4$ e all'ordine $m = 2$ $\Delta\theta_\lambda / \Delta\theta = 10^{-3}$: la larghezza naturale è trascurabile rispetto alla larghezza strumentale, ovvero la larghezza osservata è esclusivamente quella strumentale.

Osserviamo anche che il suddetto reticolo ha il potere risolutivo $R = m N = 2 \cdot 10^4$ e che quindi $\Delta\lambda / \lambda = 1 / R = 5 \cdot 10^{-5}$, molto maggiore di $\Delta\lambda / \lambda = 10^{-7}$: il reticolo può risolvere due righe vicine, ma non misurare la larghezza naturale; una riga cioè appare di sicuro monocromatica.

16.8 Fenomeni di diffrazione di Fresnel

Abbiamo già osservato nel paragrafo 16.1 che i fenomeni di diffrazione di Fresnel hanno luogo quando o la sorgente delle onde o il punto di osservazione o entrambi sono a distanza finita dall'apertura o dall'ostacolo che perturbano il fronte d'onda.

Dato che la trattazione analitica è abbastanza complicata, ci limitiamo a discutere alcuni casi in cui un'onda piana incide su un'apertura praticata su uno schermo opaco o su un ostacolo e l'osservazione avviene a distanza finita da questi, ma pur sempre grande rispetto alla lunghezza d'onda λ della luce incidente. Per il calcolo utilizziamo un metodo elaborato dallo stesso Fresnel che consiste nel suddividere il fronte d'onda piano incidente in zone opportunamente definite, ognuna delle quali viene vista dal punto P in cui calcoliamo gli effetti della diffrazione come sorgente di onde sferiche secondarie. Si tratta cioè di una applicazione particolare del principio di Huygens-Fresnel, adatta al problema che si vuole risolvere.

Con riferimento alla figura 16.33 consideriamo un fronte d'onda piano che si propaga verso P e indichiamo con $r_0 = OP$ la distanza di P dal fronte d'onda. Suddividiamo questo in tante zone anulari concentriche aventi O come centro, definite dalla condizione che le distanze da P del bordo interno e del bordo esterno di ciascuna zona differiscano di $\lambda/2$. Pertanto il bordo del disco centrale, detto *prima zona di Fresnel*, dista da P $r_1 = r_0 + \lambda/2$, il bordo esterno del primo anello, detto *seconda zona di Fresnel*, dista da P $r_2 = r_1 + \lambda/2 = r_0 + \lambda$ e così via, come indicato nella figura. In generale quindi

$$r_n = r_{n-1} + \frac{\lambda}{2} = r_0 + n \frac{\lambda}{2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

I raggi delle circonferenze che delimitano le *zone di Fresnel* sono dati da

$$R_n^2 = r_n^2 - r_0^2 = \left(r_0 + n \frac{\lambda}{2} \right)^2 - r_0^2 = n r_0 \lambda + n^2 \frac{\lambda^2}{4} \approx n r_0 \lambda \quad , \quad (16.16)$$

dove l'approssimazione è consistente con l'ipotesi $\lambda \ll r_0$.

Il campo elettrico in P si ottiene come somma dei campi elettrici E_n provenienti dalle singole zone. Osserviamo che le aree delle zone di Fresnel,

$$\Sigma_n = \pi (R_n^2 - R_{n-1}^2) = \pi [n r_0 \lambda - (n-1) r_0 \lambda] = \pi r_0 \lambda \quad ,$$

risultano tutte eguali tra loro, non dipendendo da n . Quindi le ampiezze delle onde emesse dalle varie zone sono diverse in P soltanto a causa del *fattore di inclinazione* e della distanza, diminuendo al crescere dell'ordine n della zona.

La valutazione del campo elettrico risultante E_p viene compiuta applicando il metodo dei vettori rotanti. Ciascuna zona finita è considerata a sua volta come formata da un numero infinito di elementi di superficie anulari infinitesime, ognuna delle quali emette un'onda di ampiezza infinitesima. La differenza di fase tra le onde emesse dai bordi interno ed esterno di ciascuna zona è

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (r_n - r_{n-1}) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi \quad .$$

Ciò significa che disegnando gli infiniti vettori infinitesimi relativi alla prima zona di Fresnel otteniamo una semicirconferenza il cui diametro OA dà il campo elettrico E_1 dell'onda emessa dalla prima zona (vedi figura 16.34). Per la seconda zona di Fresnel, partendo da A abbiamo ancora una semicirconferenza il cui diametro AB rappresenta il campo E_2 ; il punto B non coincide con O in quanto il modulo $E_2 < E_1$, come si è giustificato sopra. Proseguendo con la stessa costruzione si intuisce che il punto finale è il punto O' , centro del segmento OA , per cui OO' , rappresentazione di E_p , è la metà di OA , rappresentazione di E_1 :

$$E_p = \frac{1}{2} E_1 \quad , \quad I_p = \frac{1}{4} I_1 \quad .$$

L'intensità luminosa in P prodotta da un fronte d'onda indefinito è pari ad *un quarto* dell'intensità prodotta dalla prima zona: la diminuzione è dovuta all'interferenza distruttiva tra le varie zone.

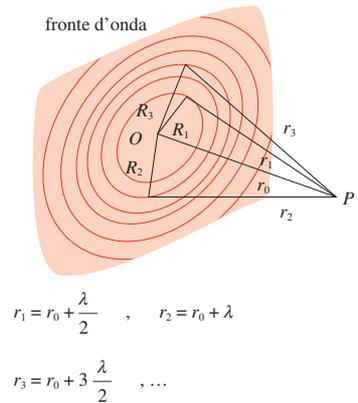


Figura 16.33

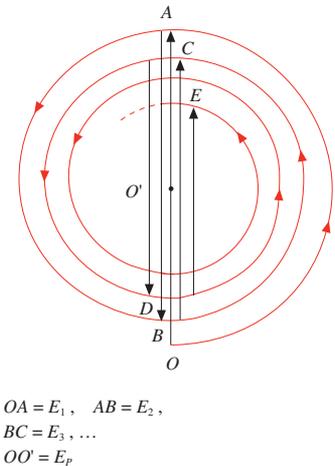
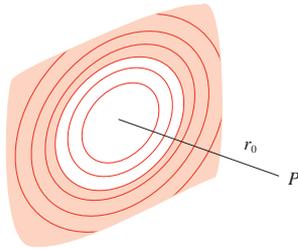
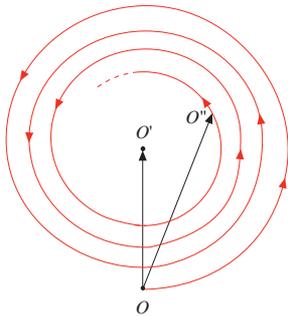


Figura 16.34



$$E_p = E_1 - E_2 + E_3$$

Figura 16.35

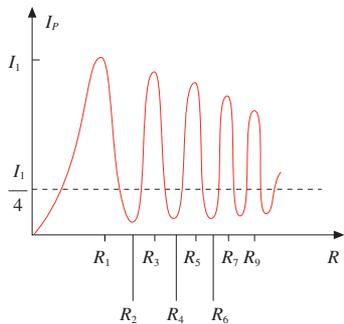


Figura 16.36

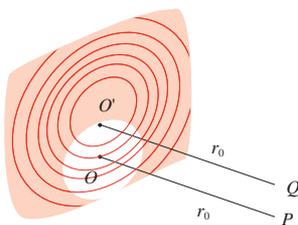


Figura 16.37

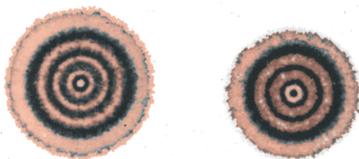


Figura 16.38

Lo stesso risultato si ottiene anche scrivendo

$$E_p = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots = \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} (E_1 - 2E_2 + E_3) + \frac{1}{2} (E_3 - 2E_4 + E_5) + \dots = \frac{1}{2} E_1 \quad .$$

I segni più e meno alternati sono dovuti alle successive differenze di fase di π e i termini tra parentesi si considerano nulli in quanto si ammette che per effetto dell'interferenza il contributo di ciascuna zona di Fresnel con n pari sia compensato dai contributi delle due semizone dispari adiacenti.

Diffrazione di un foro circolare

Per quanto detto è evidente che, fissato un punto P distante r_0 dal piano d'onda, ad ogni disco di raggio R ($0 \leq R < \infty$) tracciato sul piano come in figura 16.33 è associato, sulla curva a spirale dei vettori rotanti un punto O'' , ovvero un vettore OO'' la cui ampiezza dà l'ampiezza del campo elettrico E_p prodotto in P dalla porzione del fronte d'onda coincidente col disco. Quando R eguaglia il raggio di una delle zone di Fresnel il punto O'' sta sulla verticale passante per O .

Il ragionamento svolto finora può apparire puramente formale; se ne scopre però l'utilità non appena si interpone sul fronte d'onda, a distanza r_0 da P , uno schermo opaco con un foro di raggio R : OO'' dà l'ampiezza del campo elettrico trasmesso dal foro e l'intensità I_p è proporzionale a $(OO'')^2$. Facendo variare con continuità R da zero a infinito si ottiene per I_p l'andamento mostrato in figura 16.36: a causa dell'interferenza tra le varie porzioni del fronte d'onda l'intensità dipende fortemente dal raggio del foro. I punti di massima intensità si hanno quando il foro comprende esattamente un numero dispari di zone di Fresnel, cioè per raggi R pari a $R_1 = \sqrt{r_0 \lambda}$, $R_3 = \sqrt{3} R_1$, $R_5 = \sqrt{5} R_1$, ... secondo (16.16); i punti di minima intensità si osservano invece con i raggi $R_2 = \sqrt{2} R_1$, $R_4 = 2R_1$, $R_6 = \sqrt{6} R_1$, ..., cioè quando il foro ricopre esattamente un numero pari di zone di Fresnel; la linea tratteggiata rappresenta l'intensità in assenza dello schermo col foro. I valori dei massimi sono decrescenti e quelli dei minimi crescenti perché le ampiezze dei campi decrescono all'aumentare di R :

$$E_1 > E_1 - E_2 + E_3 > E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5 > \dots, \quad E_1 - E_2 < E_1 - E_2 + E_3 - E_4 < \dots$$

Quando discusso avviene sull'asse del foro. Per determinare l'intensità in un punto Q che non sta sull'asse OP occorre tener presente che il sistema di zone di Fresnel è caratteristico del punto di osservazione: spostandosi da P a Q parallelamente al piano del foro le zone di Fresnel si spostano rigidamente con Q . In una generica posizione l'ampiezza E_Q risulta dalla sovrapposizione dei campi di quelle porzioni di zone intersecate dal foro (figura 16.37). Anche quando il punto Q è nella zona d'ombra geometrica in esso si osserva un'intensità non nulla.

La figura di diffrazione completa osservata sullo schermo distante r_0 dal foro consta di una serie di corone circolari alternativamente chiare e scure, con il centro chiaro se $R = R_1, R_3, R_5, \dots$, scuro se $R = R_2, R_4, R_6, \dots$. Due esempi sono mostrati in figura 16.38.

Supponiamo ora di cambiare la distanza r_0 mantenendo costanti la lunghezza d'onda λ e il raggio R del foro. Ad ogni valore di r_0 è associato un sistema d'azione di Fresnel in quanto i raggi delle zone dipendono da r_0 secondo (16.16); ci sono valori di r_0 per i quali nel foro cadono un numero dispari di zone e valori per i quali invece le zone coincidenti col foro sono in numero pari: ai primi valori corrispondono massimi di intensità sull'asse, ai secondi minimi di intensità. Trattiamo numericamente questa situazione nel successivo esempio.

Esempio 16.11

Un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 0.685 \mu\text{m}$ incide su un'apertura circolare di raggio $R = 2 \text{ mm}$. Determinare a quali distanze lungo l'asse del foro si osservano massimi di intensità e a quali distanze minimi di intensità.

Soluzione

Fissato un punto P sull'asse del foro a distanza r_0 , costruiamo il corrispondente sistema di zone di Fresnel. Se r_0 è tale che $R^2 = r_0 \lambda$, il foro corrisponde alla prima zona di

Fresnel e in P si ha un massimo di intensità. Nel nostro caso

$$r_0 = \frac{R^2}{\lambda} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{0.685 \cdot 10^{-6}} = 5.84 \text{ m} .$$

All'aumentare di r_0 i raggi delle zone di Fresnel crescono e quindi se r_0 supera 5.84 m il foro coincide con una parte interna alla prima zona di Fresnel: ciò vuol dire che all'aumentare di r_0 oltre 5.84 m l'intensità decresce monotonamente senza presentare massimi o minimi.

Osserviamo che per $r_0 = 5.84$ m i raggi che provengono dal bordo del foro hanno rispetto all'asse un'inclinazione

$$\theta = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{5.84} = 3.4 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0.02 \text{ gradi}$$

e possono essere considerati praticamente paralleli. Guardando la figura di diffrazione su uno schermo posto oltre 5.84 m si nota che essa tende, allontanando lo schermo, alla figura di diffrazione di Fraunhofer, discussa nel paragrafo 16.3.

Avviciniamo ora lo schermo riducendo il valore di r_0 al di sotto di 5.84 m. Troviamo *massimi di intensità* nel punto P ogni qual volta $R^2 = nr_0\lambda$ con n dispari, ovvero quando

$$r_0 = \frac{R^2}{n\lambda} \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

$$r_3 = 1.95 \text{ m} \quad , \quad r_5 = 1.17 \text{ m} \quad , \quad r_7 = 0.83 \text{ m} \quad , \dots .$$

Si hanno invece *minimi di intensità* per quelle distanze r_0 che soddisfano alla condizione

$$r_0 = \frac{R^2}{n\lambda} \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

$$r_2 = 2.92 \text{ m} \quad , \quad r_4 = 1.46 \text{ m} \quad , \quad r_6 = 0.97 \text{ m} \quad , \dots .$$

Le distanze tra le posizioni di massimi e minimi diminuiscono avvicinandosi al foro e diminuiscono anche le intensità dei massimi perché sono sempre di più le zone di Fresnel che contribuiscono. Le figure di diffrazione sono sempre costituite da corone circolari alternativamente chiare e scure, con il centro chiaro alle distanze r_1, r_3, r_5, \dots e scuro alle distanze r_2, r_4, r_6, \dots .

Ponendosi in una posizione di massimo abbastanza vicina al foro, in modo che questo copra molte zone di Fresnel, si trova che la variazione radiale dell'intensità è quella mostrata in figura 16.39: i massimi corrispondono alle corone circolari chiare e i minimi alle corone circolari scure (vedi figura 16.38). Detto I_0 il valor medio dell'intensità si vede che in corrispondenza al bordo del foro l'intensità è $I_0/4$ e che c'è intensità nella zona d'ombra geometrica.

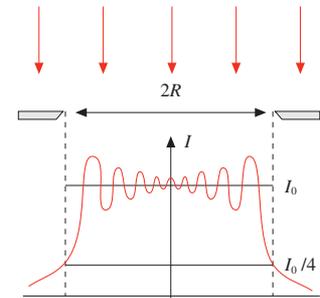


Figura 16.39

Reticolo zonato di Soret

Nel punto P si può avere un'intensità notevole se si interpone sul fronte d'onda, a distanza r_0 da P , una sottile lastra di vetro in cui sono tracciate una serie di corone circolari opache disposte in modo da intercettare, per quel valore di r_0 e λ , le zone dispari di Fresnel lasciando scoperte quelle di ordine pari o viceversa. In tali condizioni si ha solo interferenza costruttiva ($E_P = E_2 + E_4 + E_6 + \dots$ oppure $E_P = E_1 + E_3 + E_5 + \dots$) e l'intensità in P risulta molto maggiore che se si lasciassero interferire tutte le porzioni del fronte d'onda.

Il dispositivo è detto *reticolo zonato di Soret*. Se fissiamo la lunghezza d'onda λ e le dimensioni del dischetto centrale, cioè il raggio R_1 , sono automaticamente fissati tutti i raggi delle zone di Fresnel dalla condizione che le aree delle corone circolari siano eguali ed è fis-

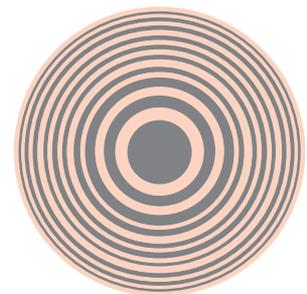


Figura 16.40

sata la distanza r_0 che corrisponde a questo sistema di zone. Un'onda piana monocromatica incidente con quella data λ viene in parte concentrata nel punto P distante r_0 dal centro del reticolo zonato e quindi possiamo considerare che questo si comporti come una *lente convergente* di focale

$$f = r_0 = \frac{R_1^2}{\lambda} = \frac{R_n^2}{n \lambda} \quad (16.17)$$

Sappiamo che per una distanza $r < r_0$ i raggi delle zone di Fresnel relative a r sono inferiori ai raggi delle corrispondenti zone relative a r_0 . Quindi esiste una distanza $r < r_0$ tale che in una corona circolare trasparente del reticolo zonato cadano tre zone di Fresnel invece che una, oppure cinque o sette o in generale un numero dispari di zone maggiore di uno. Per tutte le distanze che soddisfano a questa condizione abbiamo un massimo secondario di intensità: a differenza della lente che dà una sola immagine il reticolo zonato ne può dare molte.

Diffrazione di un disco opaco

Consideriamo ora la diffrazione subita da un'onda piana di lunghezza d'onda λ che incide ortogonalmente su un disco opaco di raggio R , osservando cosa succede in un punto P posto a distanza r_0 dal disco.

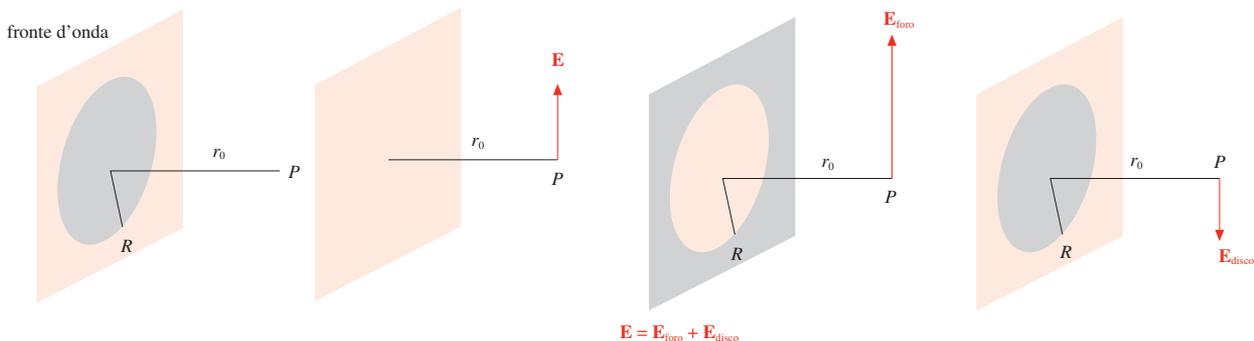


Figura 16.41

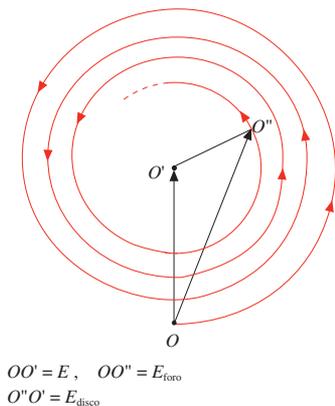
Il campo elettrico E_{disco} dell'onda diffratta si ottiene utilizzando il principio di sovrapposizione schematizzato in figura 16.41. Detto E il campo elettrico nella situazione senza ostacoli, si può porre

$$E = E_{\text{disco}} + E_{\text{foro}} \Rightarrow E_{\text{disco}} = E - E_{\text{foro}} \quad .$$

Ricordiamo che $E = E_1 / 2$, rappresentato dal vettore OO' , e che E_{foro} è rappresentato da OO'' ; seguendo la figura 16.42 deduciamo che E_{disco} è rappresentato da $O''O'$.

All'aumentare del raggio R O'' tende a O' , l'intensità I_{disco} , proporzionale a $(O''O')^2$, tende a zero, restando però sempre diversa da zero per dimensioni finite. Quindi in P , indipendentemente dal raggio del disco, si osserva sempre un punto luminoso.

Tale punto luminoso situato dietro un ostacolo era stato osservato per la prima volta da Maraldi verso il 1700, ma il fatto venne dimenticato. Quando Fresnel nel 1818 presentò la sua teoria della diffrazione, sostenendo quindi la natura ondulatoria della luce, Poisson dedusse matematicamente che, se la teoria era vera, doveva esserci un punto luminoso dietro un ostacolo opaco e concluse che la teoria era inverosimile. Invece Arago eseguì l'esperimento, ritrovò il punto luminoso di Maraldi e confermò la validità delle ipotesi di Fresnel. Per ironia della sorte il punto luminoso in questione è chiamato *punto luminoso di Poisson*.



$$OO' = E, \quad OO'' = E_{\text{foro}} \\ O''O' = E_{\text{disco}}$$

Figura 16.42

Esempio 16.12

Un'onda piana con $\lambda = 0.685 \mu\text{m}$ incide perpendicolarmente su un disco opaco di raggio $R = 2 \text{ mm}$. Confrontare l'intensità osservata in un punto P_1 sull'asse del disco alla distanza $r_1 = 5.84 \text{ m}$ con l'intensità I_0 in assenza del disco. Ripetere il calcolo per un punto P_2 distante $r_2 = 2.92 \text{ m}$.

Soluzione

Nella posizione r_1 , riprendendo i risultati dell'esempio 16.11, il disco opaco copre la prima zona di Fresnel relativa a P_1 , per cui $E_{\text{foro}} = 2E$ se E è l'ampiezza che sarebbe prodotta dal fronte d'onda completo. Pertanto

$$E_{\text{disco}} = E - E_{\text{foro}} = -E \quad , \quad I_{\text{disco}} = I \quad ,$$

l'intensità in P_1 è la stessa di quella in assenza del disco opaco. In P_2 , a distanza $r_2 = r_1 / 2$, $E_{\text{foro}} \approx 0$ per cui

$$E_{\text{disco}} = E - E_{\text{foro}} = E \quad , \quad I_{\text{disco}} = I$$

e si ha la stessa intensità che a distanza r_1 .

La figura di diffrazione completa consiste ancora di una serie di anelli scuri e chiari che circondano *in ogni caso* un dischetto centrale chiaro.

Diffrazione di un ostacolo piano

Prendiamo infine in considerazione un ostacolo piano opaco delimitato da uno spigolo netto, come potrebbe essere il bordo di una fenditura rettilinea indefinita o il filo di una lama. L'onda incidente è piana e monocromatica, con fronte d'onda parallelo al piano contenente l'ostacolo.

Ponendosi in un punto P a distanza r_0 dal bordo e costruendo il relativo sistema di zone di Fresnel, si osserva che queste sono tutte tagliate a metà dal bordo dell'ostacolo. Se E è l'ampiezza del campo elettrico prodotto in P dall'intero fronte d'onda, l'ampiezza in presenza dell'ostacolo è $E_p = E / 2$ e l'intensità $I_p = I / 4$. In un punto P_1 , posizionato come mostrato in figura 16.43 e distante da P $R_1 = \sqrt{r_0 \lambda}$, la prima zona di Fresnel contribuisce completamente all'intensità; per le altre si può dire che ciascuna zona pari è tagliata un po' meno della successiva zona dispari, così che il contributo da sottrarre è minore che in assenza dell'ostacolo e l'intensità in P_1 risulta maggiore dell'intensità I senza ostacolo. Nella figura 16.44 è mostrato l'andamento dell'intensità trasversalmente all'asse OP : si vede che c'è intensità nella zona d'ombra geometrica, che le variazioni si hanno in vicinanza della proiezione del bordo e che allontanandosi da questa l'intensità tende al valore costante I . Analogamente al crescere della distanza r_0 questi effetti di diffrazione tendono a scomparire. Infine nella figura 16.45 è mostrata la figura di diffrazione di una fenditura (due bordi con spigolo netto) in vicinanza della stessa e all'infinito, dove si ritrova il risultato di Fraunhofer.

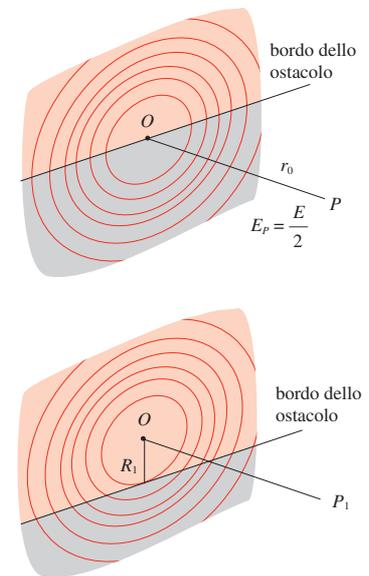


Figura 16.43

16.9 Olografia

Un'onda piana monocromatica che si propaga lungo l'asse x e incide su una lastra fotografica produce su questa un annerimento che dipende localmente dall'intensità che ha colpito la lastra durante il tempo di esposizione e che quindi, per l'onda piana, è uniforme. Supponiamo che in un punto P , posto a distanza x_0 dalla lastra, ci sia una sferetta molto piccola, la quale diffonde, attraverso un meccanismo del tipo discusso nel paragrafo 13.8, la luce incidente dando origine ad un'onda sferica coerente con l'onda primaria e quindi capace di interferire con essa.

In un punto Q della lastra L distante r da P e z dall'asse x si osserva pertanto l'interferenza tra l'onda primaria E_{rif} , che chiamiamo *onda di riferimento*, e l'onda sferica E_{ogg} proveniente da P , che chiamiamo *onda oggetto*:

$$E_{\text{rif}} = E_0 \cos(k x_0 - \omega t) \quad , \quad E_{\text{ogg}} = E(r) \cos(kr - \omega t) \quad .$$

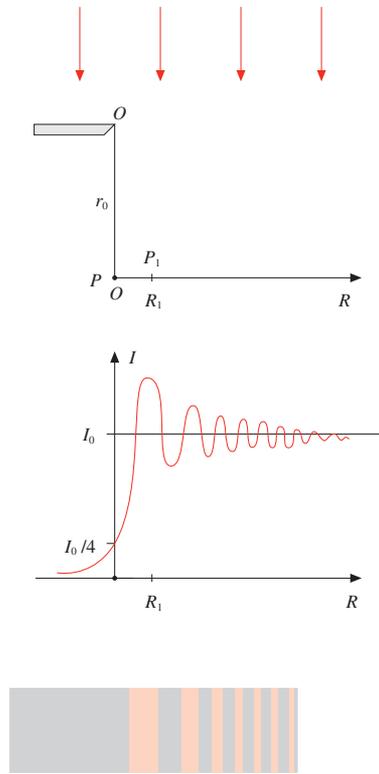


Figura 16.44

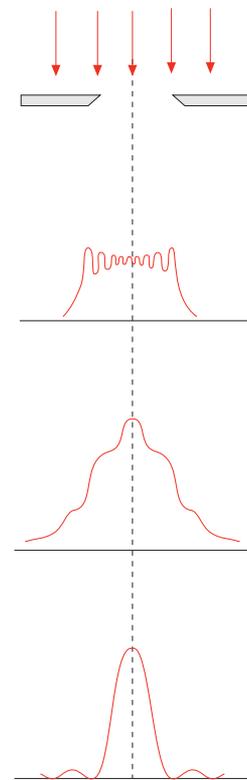


Figura 16.45

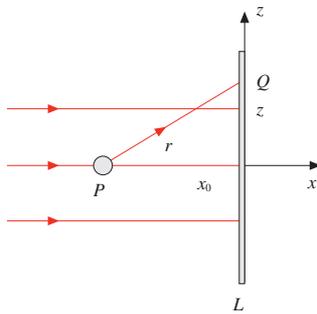


Figura 16.46

La differenza di fase tra le onde nel punto Q è

$$\delta(r) = k(r - x_0) = \frac{k z^2}{2 x_0} ,$$

dove si è usata l'approssimazione, valida se $z \ll x_0$,

$$r = \sqrt{x_0^2 + z^2} = x_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{x_0^2}} \simeq x_0 \left(1 + \frac{z^2}{2x_0^2} \right) .$$

L'intensità della luce nel punto Q , ovvero nei punti di una circonferenza di raggio z , è proporzionale a

$$E_0^2 + E^2(r) + 2E_0 E(r) \cos \delta(r) \simeq E_0^2 \left[1 + 2 \frac{E(r)}{E_0} \cos \frac{k z^2}{2x_0} \right] ,$$

trascurando $E^2(r)$ rispetto a E_0^2 .

La lastra fotografica registra la figura di interferenza in forma di anelli alternativamente scuri e chiari che compaiono su di essa dopo lo sviluppo: le zone scure corrispondono a massimi di interferenza, le zone chiare a minimi. I raggi z sono:

$$\max \quad \cos \delta = 1 \quad , \quad \frac{k z^2}{2x_0} = 2 m \pi \quad , \quad z = \sqrt{2 m \lambda x_0} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (16.18)$$

$$\min \quad \cos \delta = -1 \quad , \quad \frac{k z^2}{2x_0} = (2 m + 1) \pi \quad , \quad z = \sqrt{(2 m + 1) \lambda x_0} \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots .$$

Nella figura 16.47 sulla lastra sono colorate le zone in cui si hanno i massimi, mentre sono state lasciate bianche le zone dei minimi (non nulli); gli anelli accanto rappresentano il negativo della lastra.

Osserviamo che nella figura di interferenza sono registrate le informazioni sull'ampiezza e sulla fase dell'onda diffusa che ha contribuito ad impressionare la lastra: l'informazione sull'ampiezza è data dal *grado di annerimento* e quella sulla fase è contenuta nella coordinata z , legata a δ . A questa figura di interferenza si dà il nome di *ologramma* dell'oggetto puntiforme P .

Supponiamo di illuminare la lastra fotografica sviluppata con lo stesso fascio di luce con cui l'abbiamo prodotta (fascio di riferimento). La struttura degli anelli chiari e scuri che costituiscono l'ologramma è quella caratteristica di un reticolo zonato di Soret (paragrafo 16.7); il raggio del dischetto scuro centrale, eguale al raggio della prima posizione di minimo, vale secondo (16.18) $z_1 = \sqrt{\lambda x_0}$ ed è quindi anche eguale al raggio R_1 della prima zona di Fresnel relativa ad un punto P' distante x_0 dall'ologramma, secondo (16.16). Pertanto le onde diffratte dalle aperture anulari (anelli chiari) vengono focalizzate, in accordo con (16.17), nel punto distante

$$f = \frac{z_1^2}{\lambda} = x_0 \quad .$$

Si dice che P' , simmetrico del punto P in cui era stata posta la sferetta durante la produzione dell'ologramma, è l'*immagine reale* dell'oggetto puntiforme P . Nella figura 16.48 sono disegnati anche i raggi diffratti allo stesso angolo di quelli convergenti in P' , ma lungo la direzione simmetrica; tali raggi sembrano provenire dalla posizione in cui era stato posto l'oggetto P e per questa ragione si dice che l'ologramma fornisce anche un'*immagine virtuale* dell'oggetto, situata nella stessa posizione e completamente indistinguibile da questo. In effetti i raggi che sembrano provenire da P soddisfano alle stesse condizioni di coerenza valide per i raggi che convergono in P' e portati a interferire sulla retina danno anch'essi un massimo. In un certo senso ciascun raggio dell'onda di riferimento che arriva su un anello trasparente si comporta come se arrivasse alla fenditura di un reticolo e dà due raggi corrispondenti ai massimi del prim'ordine, uno convergente in P' e uno che sembra divergere da P .

Se in luogo di un oggetto puntiforme nell'intorno di P è posto un oggetto vero e proprio trasparente, ciascun elemento dà origine alla sua figura di interferenza e quindi al suo reticolo di Soret e l'ologramma è la sovrapposizione di un numero grandissimo di tali reticoli. Osservato ad occhio nudo o con un microscopio, l'ologramma si presenta complicato e di difficile interpretazione. Invece se lo si illumina con lo stesso fascio di luce con cui è stato prodotto esso dà origine a due immagini, una virtuale nella posizione in cui era posto l'oggetto e una reale in posizione simmetrica. L'immagine reale, che ha le stesse proprietà rispetto all'oggetto dell'immagine data da uno specchio piano, può essere osservata mettendola a fuoco su uno schermo. L'immagine virtuale è visibile ad occhio nudo guardando attraverso l'ologramma. Si tratta, è bene notarlo, di *immagini veramente tridimensionali*: spostando l'occhio si vede cambiare l'immagine, proprio come avviene con un oggetto reale. Le stesse immagini, anche se con una risoluzione ottica minore, si ottengono illuminando soltanto una parte dell'ologramma, in quanto questa contiene un'informazione, seppure parziale, su tutti i punti dell'oggetto.

L'originalità della procedura olografica consiste nella registrazione dell'informazione completa relativa al fronte d'onda emesso dall'oggetto e successivamente nella possibilità di ricostruire questo fronte d'onda come se fosse emesso dall'oggetto stesso; la normale fotografia è soltanto una registrazione di intensità. Il principio di funzionamento è conseguenza diretta della natura ondulatoria della luce e delle proprietà di coerenza delle onde che interferiscono. Nella produzione di un ologramma le onde interferiscono dopo aver compiuto cammini a volte molto differenti come lunghezza ed è quindi necessario che la sorgente abbia un'elevata lunghezza di coerenza (vedi paragrafi 12.10 e 15.3). Per questa ragione, anche se l'idea dell'olografia risale al 1948 (D. Gabor), essa ha trovato reali applicazioni a partire dal 1963, solo dopo la realizzazione del laser (1960).

Nella pratica per la produzione e l'osservazione susseguente dell'ologramma si adottano configurazioni geometriche differenti da quella cosiddetta in linea trattata prima. Tra l'altro, nell'osservazione dell'immagine virtuale per trasparenza attraverso l'ologramma si ha lo svantaggio di guardare in direzione del laser utilizzato per la ricostruzione.

Un possibile dispositivo che non utilizza lenti è mostrato in figura 16.50. Lungo il cammino di un fascio laser viene posto uno specchio semiriflettente che dà origine al fascio trasmesso di riferimento e al fascio riflesso che colpisce l'oggetto di cui si intende fare l'olo-

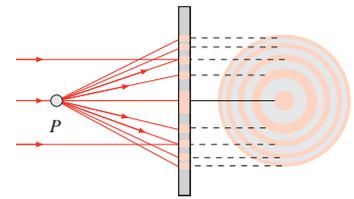


Figura 16.47

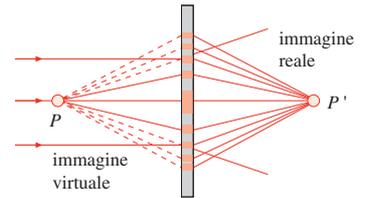


Figura 16.48

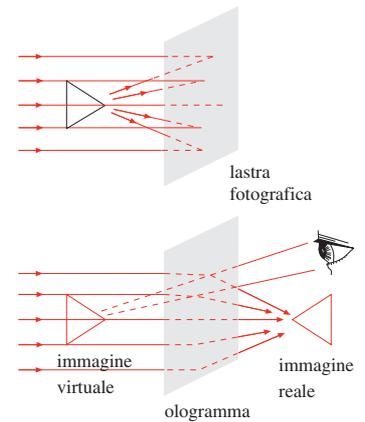


Figura 16.49

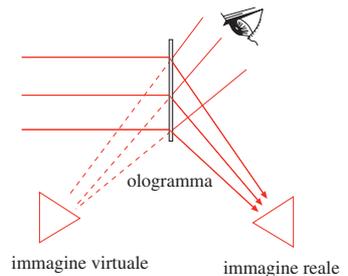
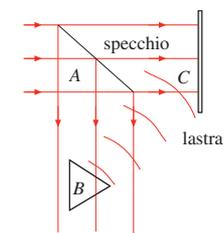


Figura 16.50

gramma. La luce diffusa da ciascun punto dell'oggetto si sovrappone sulla pellicola fotografica all'onda di riferimento formando l'ologramma relativo. La figura di interferenza è un po' più complicata da descrivere analiticamente, anche se la struttura rimane sostanzialmente la stessa. Quando l'ologramma viene illuminato con lo stesso fascio laser si osservano ancora due immagini: una virtuale nella posizione occupata dall'oggetto durante la registrazione e una reale in posizione simmetrica. La differenza di cammino $AB + BC - AC$ può essere dell'ordine del metro per cui l'utilizzo del laser come sorgente di onde coerenti è essenziale.

Applicazioni dell'olografia si hanno nel campo della microscopia, per osservare conformazioni tridimensionali di piccoli oggetti come le cellule, e nel campo della medicina, dove ad esempio l'ologramma dell'occhio permette di osservare contemporaneamente retina e cristallino. Sono possibili ologrammi anche con gli ultrasuoni, esistendo attualmente sorgenti altamente coerenti e rivelatori adatti; gli ologrammi ultrasonici permettono di osservare parti di organi interni del corpo umano.

Esempio 16.13

Per il dispositivo schematizzato in figura 16.46 calcolare l'ologramma di un punto materiale distante $x_0 = 50$ cm dalla lastra; la luce laser di riferimento ha lunghezza d'onda $\lambda = 0.633$ mm.

Soluzione

La differenza di fase, come abbiamo dimostrato, è

$$\delta = k(r - x_0) = \frac{kz^2}{2x_0} = \frac{\pi z^2}{\lambda x_0}$$

e i massimi di interferenza si hanno per

$$\delta = 2m\pi \Rightarrow z_{\max} = \sqrt{2m\lambda x_0} = 0.80\sqrt{m} \text{ mm}.$$

L'ologramma sviluppato è costituito da una serie di corone circolari concentriche annate di raggi

$$z = 0.80, 1.13, 1.39, 1.60, \dots \text{ mm} ;$$

il primo minimo si forma per $z = 0.56$ mm e all'interno di questo si trova il dischetto centrale scuro.

Il massimo con $m = 100$, che è l'ordine di grandezza del numero di corone circolari effettivamente realizzabili, dato che esse si infittiscono al crescere di m , ha $z = 8$ mm: l'approssimazione $z \ll x_0$ è ancora ampiamente verificata.

16.10 Diffrazione dei raggi X

I raggi X occupano la banda di radiazioni elettromagnetiche con lunghezze d'onda inferiori a 10^{-9} m; essi vengono prodotti dal frenamento in un materiale pesante di elettroni accelerati da d.d.p. superiori a qualche migliaio di volt oppure quando un elettrone compie una transizione verso uno dei livelli energetici più interni di un atomo, come abbiamo accennato nel paragrafo 13.12.

In un normale reticolo di diffrazione ottico i raggi X non vengono praticamente diffratti; ad esempio, con $\lambda = 10^{-10}$ m e $d = 10^{-6}$ m il massimo del prim'ordine si forma all'angolo $\theta = \lambda/d = 10^{-4}$ rad = $5.7 \cdot 10^{-3}$ gradi, troppo vicino al massimo di ordine zero per essere osservato. Invece un reticolo spaziale naturale adatto a produrre la diffrazione dei raggi X è un reticolo cristallino, in cui gli atomi sono disposti secondo strutture regolari con distanze reciproche molto piccole.

In un cristallo di salgemma gli ioni Na^+ e Cl^- formano un reticolo cubico di lato a . Ciascuno ione è al centro di una cella cubica di lato a e il volume di ogni cella elementare è a^3 . Una mole di NaCl ha una massa di $A = 58.45$ kg e contiene $2N_A = 2 \cdot 6.022 \cdot 10^{26}$ ioni, occupando quindi un volume $V = 2N_A a^3$. La densità del salgemma è $\rho = 2.17 \cdot 10^3$ kg/m³ per cui

$$A = 2 N_A a^3 \rho, \quad a = \left(\frac{A}{2 N_A \rho} \right)^{1/3} = 2.82 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.282 \text{ nm} .$$

La distanza a è detta *costante reticolare* e il suo valore è indicativo delle distanze interatomiche nei cristalli.

Quando un fascio di raggi X di lunghezza d'onda λ incide su questa struttura di atomi, gli elettroni che circondano ogni singolo nucleo si comportano come dipoli oscillanti, emettendo radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda λ in tutte le direzioni. Il cristallo si comporta quindi come un sistema tridimensionale di sorgenti coerenti e nello spazio circostante si osserva l'interferenza delle onde emesse da queste sorgenti.

Consideriamo una serie di piani paralleli passanti per gli atomi; le tracce di questi piani, detti piani reticolari, sono segnate nella figura 16.52. Detta d la *distanza tra due piani reticolari*, questa risulta in generale minore della costante reticolare a ; solo per quei piani reticolari che sono orizzontali e verticali nella figura si ha $d = a$.

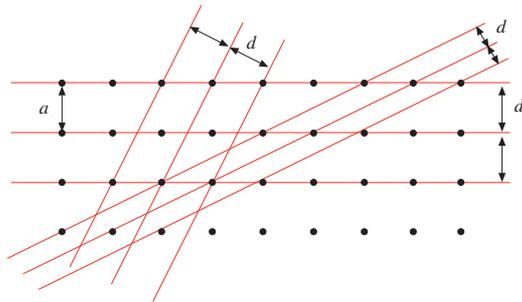


Figura 16.52

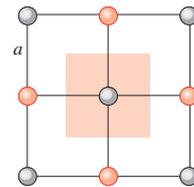
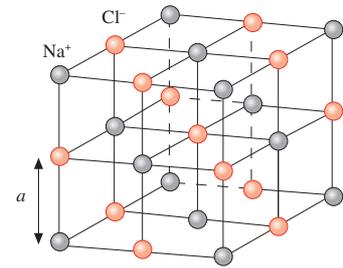


Figura 16.51

Un'onda piana, che incide formando l'angolo θ (*angolo di radenza*) con un insieme di piani reticolari distanti d , vede la serie di atomi, uno per piano reticolare, che appartengono ad una retta ortogonale ai piani reticolari, come un reticolo unidimensionale. Se ci poniamo nella direzione di osservazione che forma l'angolo θ rispetto ai piani reticolari, le differenze di cammino

$$BB'B'' , CC'C'' - BB'B'' , DD'D'' - CC'C''$$

tra le onde emesse da due sorgenti contigue come A e B' , B' e C' , C' e D' sono eguali a $2d \sin \theta$. Secondo (15.11) abbiamo interferenza costruttiva quando

$$2 d \sin \theta = m \lambda \quad \text{ovvero} \quad \sin \theta = \frac{m \lambda}{2d} \quad m = 1, 2, 3, \dots , \quad (16.19)$$

Legge di Bragg

relazione detta *legge di Bragg*. Per angoli diversi il fascio risulta notevolmente attenuato o addirittura soppresso a causa dell'interferenza distruttiva, proprio come avviene per i reticoli ottici.

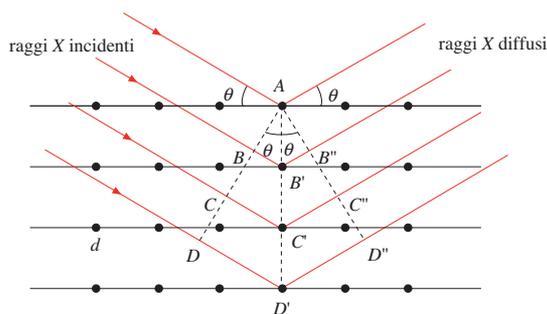


Figura 16.53

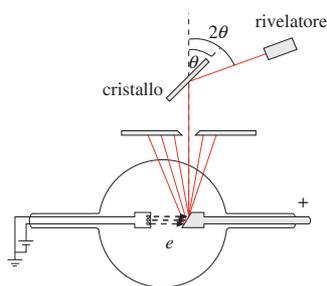


Figura 16.54

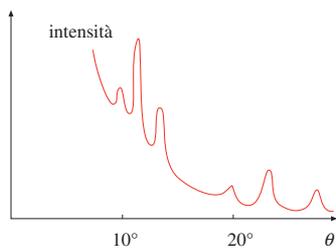


Figura 16.55

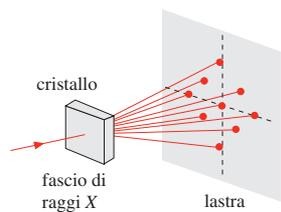


Figura 16.56

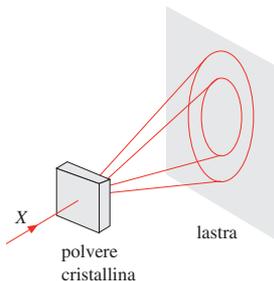


Figura 16.57

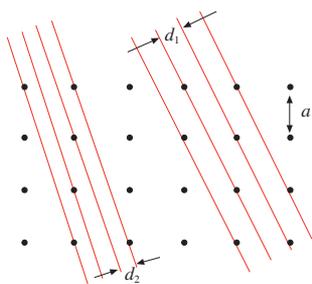


Figura 16.58

Un dispositivo per l'osservazione della diffrazione di raggi X è lo *spettrografo a cristallo* della figura 16.54, ideato da Bragg. In corrispondenza ad una determinata serie di piani reticolari, cioè ad un certo valore di d , si varia l'angolo θ e misurando gli angoli dei massimi si deduce dalla (16.19) lo spettro delle lunghezze d'onda del fascio di raggi X. Si verifica così l'esistenza della componente continua alla radiazione di frenamento, alla quale è sovrapposta la componente a *righe* caratteristica della struttura atomica del materiale emettitore. In figura 16.55 è mostrato uno dei primi spettri ottenuti da Bragg nel 1913: sono visibili gli spettri del primo e del second'ordine, ciascuno con tre righe. Viceversa, utilizzando un fascio monocromatico di raggi X si possono determinare le varie distanze d , acquisendo informazioni sulla struttura cristallina del materiale usato come bersaglio nello spettrografo.

Se il fascio incidente può incontrare nel cristallo diverse famiglie di piani reticolari l'aspetto della figura di diffrazione è molto diverso. In effetti la prima evidenza sperimentale sulla natura ondulatoria dei raggi X venne ottenuta da von Laue nel 1912, con l'apparato schematicizzato in figura 16.56. Un fascio di raggi X con piccola sezione incide su un sottile cristallo di solfuro di zinco; su una lastra fotografica si osserva la figura di diffrazione. Questa consta di un insieme di punti disposti in modo regolare intorno al fascio centrale trasmesso; ciascun punto è la traccia di una direzione lungo cui si è avuto un massimo. Infatti una lunghezza d'onda λ incidente può trovare una coppia di valori d_i e θ_i per i quali è soddisfatta (16.19) con un certo valore intero positivo m_i : vuol dire che la direzione di incidenza forma l'angolo di radenza θ_i con una famiglia di piani reticolari aventi tra loro distanza d_i e che $2d_i \sin\theta_i = m_i \lambda$; il raggio diffratto impressiona la lastra in una zona ristretta, quasi puntiforme. Data λ la (16.19) può essere soddisfatta anche per una terna di valori d , θ , m diversa dalla precedente e il fatto si può ripetere per le altre lunghezze d'onda incidenti. Si forma così lo *spettrogramma a punti di Laue* nel quale ad ogni punto è dunque associata una famiglia di piani reticolari; esso è caratteristico della struttura cristallina illuminata col fascio di raggi X.

Invece che da un cristallo supponiamo che il materiale diffondente sia costituito da una polvere contenente un gran numero di microcristalli, orientati in maniera casuale. Se la condizione (16.19) è soddisfatta per una data famiglia di piani reticolari di un particolare microcristallo, essa viene soddisfatta anche da moltissimi altri microcristalli e al posto di un punto abbiamo sulla lastra fotografica una circonferenza. È come prendere una particolare situazione realizzata col metodo di Laue e ruotare il cristallo attorno all'asse del fascio: infatti nella polvere cristallina si trovano tutte le orientazioni che corrisponderebbero ad una tale rotazione. Lo *spettrogramma*, detto di *Debye-Scherrer*, contiene una serie di circonferenze, ognuna generata come descritto con una diversa famiglia di piani reticolari.

La diffrazione dei raggi X, oltre che per la spettroscopia dei raggi X stessi e per indagini sui cristalli, è utilizzato anche per lo studio di strutture microscopiche come quelle di molecole biologiche complesse, tipo DNA.

Esempio 16.14

Un fascio di raggi X di lunghezza d'onda $\lambda = 0.1$ nm incide su un cristallo di NaCl che funge da bersaglio nello spettrografo a cristallo. Calcolare gli angoli θ ai quali si formano i massimi di interferenza per i due sistemi di piani reticolari mostrati in figura.

Soluzione

Dalla figura si ricava, essendo $a = 0.282$ nm,

$$d_1 = a / \sqrt{5} = 0.126 \text{ nm} , \quad d_2 = a / \sqrt{10} = 0.089 \text{ nm} .$$

I massimi si formano per

$$\sin\theta = \frac{m \lambda}{2d_1} = 0.397 m , \quad \theta_1 = 23.4^\circ \quad \theta_2 = 52.7^\circ , \quad \sin\theta = \frac{m \lambda}{2d_2} = 0.562 m , \quad \theta_1 = 34.2^\circ .$$

Esempio 16.15

Un fascio di raggi X, contenente tutte le lunghezze d'onda comprese nell'intervallo tra 0.01 nm e 1 nm, incide su un cristallo di NaCl come mostrato in figura. Per le due serie di piani reticolari indicati calcolare in quali direzioni si formano i massimi di interferenza e per quali lunghezze d'onda.

Soluzione

Essendo $a = 0.282$ nm, $d_1 = a/\sqrt{2} = 0.199$ nm, $d_2 = a/\sqrt{5} = 0.126$ nm. Inoltre

$$\operatorname{tg}\theta_1 = 1, \quad \theta_1 = 45^\circ, \quad \alpha_1 = 2\theta_1 = 90^\circ, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = 0.5, \quad \theta_2 = 26.57^\circ, \quad \alpha_2 = 2\theta_2 = 53.13^\circ.$$

Le lunghezze d'onda che interferiscono costruttivamente per il primo sistema di piani reticolari si ricavano da

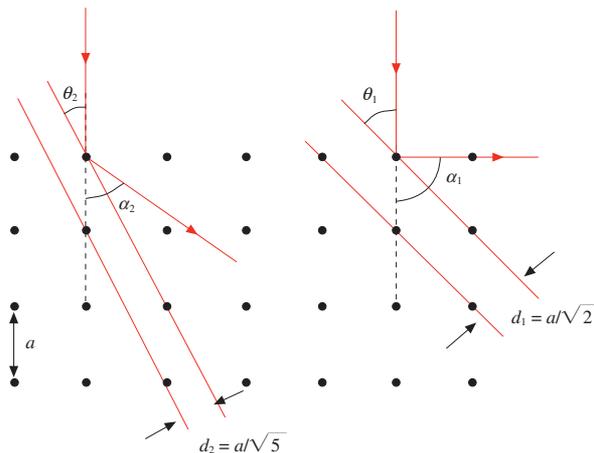
$$2d_1 \sin\theta_1 = 0.282 = m\lambda \text{ in nm};$$

visti i limiti su λ m è un numero intero compreso tra 0.282 e 28.2, quindi

$$\lambda = \frac{0.282}{m} \text{ nm} \quad m = 1, 2, \dots, 28.$$

Per la seconda serie di piani reticolari

$$2d_2 \sin\theta_2 = 0.113 = m\lambda \text{ in nm} \quad \lambda = \frac{0.113}{m} \text{ nm} \quad m = 1, 2, \dots, 11.$$


Figura 16.59

Vogliamo notare, per concludere, che il termine diffrazione dei raggi X, per quanto comunemente usato, non è appropriato. Si tratta piuttosto di *diffusione*; ciò che si osserva, e che dimostra la natura ondulatoria dei raggi X, è l'*interferenza tra i raggi diffusi lungo date direzioni*.

P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci

Fisica

Volume II

Accedi all'ebook e ai contenuti digitali > Espandi le tue risorse > con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere alla versione **ebook** del testo e agli ulteriori servizi. L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.

